

SPRENDIMO, GAUTO TOPSIS METODU, PATIKIMUMO STATISTINĖ ANALIZĖ

Rūta Simanavičienė¹, Jovita Cibulskaitė²

^{1,2} Vilniaus Gedimino technikos universiteto, Matematinės statistikos katedra

Adresas: Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva,

El. paštas: ¹ruta.simanaviciene@vgtu.lt, ²jovita.cibulskaitė@stud.vgtu.lt

Gauta: 2015 m. rugpjūtis

Pataisyta: 2015 m. rugsėjis

Paskelbta: 2015 m. lapkritis

Santrauka. Tinkamiausio sprendimo, atsižvelgiant į daugelį kriterijų, priėmimo uždaviniai yra nagrinėjami įvairiose srityse, pavyzdžiui, inžinerija, pramonė, finansai, ekonomika ir kitos. Jeigu uždavinio tikslas – nagrinėjamas alternatyvas išrikiuoti prioritetine eilute, atsižvelgiant į daugelį kiekybinių rodiklių, tai tokiems sprendimo priėmimo uždaviniams taikomi kiekybiniai daugiakriteriniai sprendimo priėmimo metodai. Analitikai taikydami šiuos metodus dažniausiai neatsižvelgia į pradinių duomenų paklaidas – rodiklių reikšmių nuokrypius, tokiu atveju priimtas sprendimas gali kelti abejonių. Tuo remiantis, šiame straipsnyje daugiakriterinio sprendimo, gauto TOPSIS metodu, patikimumui vertinti siūloma taikyti statistinės analizės metodus: formuluoti statistines hipotezes bei skaičiuoti parametų pasikliautinius intervalus. Remiantis gautomis statistinėmis išvadomis formuluojamos išvados apie daugiakriterinio sprendimo, gauto TOPSIS metodu, patikimumą.

Reikšminiai žodžiai: daugiakriterinis uždavinys, sprendimo patikimumas, TOPSIS metodas, statistinė hipotezė, pasikliautinis intervalas.

1. Įvadas

Tinkamiausio sprendimo, atsižvelgiant į daugelį kriterijų, priėmimo uždaviniai yra nagrinėjami įvairiose srityse, pavyzdžiui, inžinerija, pramonė, finansai, ekonomika ir kitos sritys. Tai daugiakriteriniai sprendimo priėmimo¹ uždaviniai. Jeigu uždavinio tikslas – nagrinėjamas alternatyvas išrikiuoti prioritetine eilute, atsižvelgiant į daugelį kiekybinių rodiklių, tai tokiems sprendimo priėmimo uždaviniams taikomi kiekybiniai daugiakriteriniai sprendimo priėmimo metodai (angl. *Multiple Attribute Decision Making methods*). Šie metodai taikomi norint išrinkti tinkamiausią / racionalią alternatyvą iš siūlomų alternatyvų sąrašo arba norint suranguoti alternatyvas nustatytos tikslo funkcijos atžvilgiu [9]. Šiame straipsnyje naudojamas vienas iš daugiakriterinių sprendimo priėmimo metodų – TOPSIS² metodas. [4]. Šis metodas – variantų racionalumo nustatymo artumo idealiajam taškui metodas. TOPSIS metodo esmė – nustatyti kiekvienos alternatyvos santykinį atstumą iki „idealiai blogiausio“ varianto. Kuo tas atstumas didesnis, tuo vertinama alternatyva yra tinkamesnė sprendimo priėmėjui.

Analitikai taikydami daugiakriterinius sprendimo priėmimo metodus dažniausiai neatsižvelgia į pradinių duomenų paklaidas – rodiklių reikšmių nuokrypius. Tokiu atveju priimtas sprendimas gali kelti abejonių. Sprendimą priimančiam asmeniui kyla poreikis nustatyti, ar gautas sprendimas – alternatyvų išrikiavimas pagal racionalumą – yra patikimas.

Atlikus literatūros analizę pastebėta, kad daugiakriterinio sprendimo patikimumo klausimas yra nagrinėjamas atliekant jautrumo analizę tiek rodiklių svorių atžvilgiu [6], tiek rodiklių reikšmių atžvilgiu [11], tačiau bendros patikimumo vertinimo metodikos nėra. Šiame darbe buvo pasirinkta daugiakriterinio sprendimo patikimumą vertinti, atsižvelgiant į rodiklių reikšmių pokyčius, statistiniais metodais ir pagrįsti statistinėmis išvadomis.

Atliekant statistinius tyrimus reikia įsitikinti, ar pastebėtas skirtumas tarp tiriamų objektų yra reikšmingas, ar tai tik paprastas atsitiktinumas. Todėl yra taikomi įvairūs statistiniai metodai, pavyzdžiui, parametrinių hipotezių tikrinimas ar parametų pasikliautinių intervalų skaičiavimas. Tuo remiantis, šiame straipsnyje sprendimo patikimumui vertinti yra keliamos hipotezės, kuriomis tikrinama, ar vertinami alternatyvų racionalumo reikšmių vidurkiai ir dispersijos statistiškai reikšmingai skiriasi tarpusavyje. Taip pat yra skaičiuojami vidurkių pasikliautiniai intervalai. Remiantis gautomis statistinėmis išvadomis ir rezultatais daroma prielaida, kad daugiakriterinis sprendimas laikomas patikimu tada, kai vertinamų alternatyvų racionalumo vidurkių pasikliautiniai intervalai tarpusavyje nepersikloja ir parametrinė hipotezė apie tų vidurkių lygybę yra atmetama.

¹ Angl. *Multicriteria decision making*.

² Angl. *Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*.

2. Alternatyvų rangavimas TOPSIS metodu

2.1. Daugiakriterinis sprendimo priėmimo uždavinys

Pradžioje formuluojamas daugiakriterinis sprendimo priėmimo uždavinys, kurį sudaro šie pagrindiniai etapai:

1. Aprašoma galimų alternatyvų aibė $A = (A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_m)$. Alternatyvomis šiame straipsnyje vadinami visi galimi problemos sprendimo variantai.
2. Nustatomi alternatyvas apibūdinantys rodikliai – kiekvienas rodiklis apibūdina vieną skirtingą alternatyvos savybę. Rodiklių aibė žymima $R = (R_1, R_2, \dots, R_j, \dots, R_n)$. Svarbu paminėti, kad rodikliai gali būti maksimizuojami arba minimizuojami – jie atspindi skirtingą požiūrį į alternatyvas. Tai reiškia, kad ne visada didžiausia rodiklio reikšmė yra geriausia. Kartais geriausia reikšmė yra mažiausia (jei rodiklis yra minimizuojamojo pobūdžio).
3. Taip pat rodikliai gali būti išmatuoti skirtingais matavimo vienetais. Rodiklių vienetų suvienodinimui naudojama rodiklių reikšmių normalizacija. Sunormalizuotos rodiklių reikšmės tampa bedimensiais dydžiais. Remiantis E. Triantaphyllo [13], V. Podvezko, R. Ginevičiaus [3] moksliniais darbais norint lygiavertiškai lyginti alternatyvas, yra svarbu, kad įtaką darantys veiksniai būtų išreikšti tarpusavyje palyginamais dydžiais.
4. Sprendimo matrica sudaroma iš efektyvumo rodiklių reikšmių nustatytų kiekvienai alternatyvai aibės.
5. Rodiklio svoris – rodiklio svarba nagrinėjamam uždaviniui. Visų n rodiklių svoriams $\omega_j, j = \overline{1, n}$ nustatyti taikomas porinio palyginimo metodas pagal Saaty skalę [7].
6. Iš porinio palyginimo matricų tikrinamas ekspertų nuomonių suderinamumas. Jeigu jis pakankamas, tada nustatomi rodiklių svoriai ir rodikliai suranguojami, jeigu ne – būtina peržiūrėti ekspertų grupės sudėtį, atsižvelgiant į ekspertų kvalifikaciją.
7. Alternatyvos vertinamos taikant pasirinktą daugiatikslių sprendimo priėmimo metodą, naudojant sprendimų matricą ir gautas rodiklių svorių reikšmes.
8. Remiantis gautais skaičiavimo rezultatais nagrinėjamos alternatyvos suranguojamos ir daromos bendrosios išvados apie alternatyvų prioritetiškumą [4], [9].

2.2. Analitinės hierarchijos proceso (AHP) metodas rodiklių reikšmingumui nustatyti

Analitinės hierarchijos proceso metodą 1980 m. pasiūlė T. Saaty [7]. Metodo pagrindas – ekspertinės rodiklių porinio palyginimo matricos, kurias pildo ekspertai. Šios matricos pildomos tokiu principu: eilutėje esantis rodiklis lyginamas su stulpelyje esančiais rodikliais. Jeigu eilutėje esantis rodiklis yra svarbesnis nei stulpelyje esantis rodiklis, rašomas svarbumo lygį nurodantis sveikasis skaičius. Jeigu eilutėje esantis rodiklis yra mažiau svarbus nei stulpelyje esantis rodiklis – rašomas atvirkštinis skaičius. Rodiklių svarbai nusakyti naudojama svarbumo skalė, pasiūlyta T. Saaty [7] (1 lentelė).

1 lentelė. T. Saaty svarbumo skalė ir jos aprašas [7]

Svarbumo lygis	Apibrėžimas
1	Rodikliai vienodai svarbūs
3	Vienas rodiklis truputį svarbesnis už kitą
5	Vienas rodiklis svarbesnis už kitą
7	Vienas rodiklis daug svarbesnis už kitą
9	Vienas rodiklis nepalyginti svarbesnis už kitą
2, 4, 6, 8	Tarpinės reikšmės

Užpildyta porinio palyginimo matrica B yra kvadratinė, atvirkštinė, simetrinė (angl. *reciprocal*), t. y. $b_{ji} = \frac{1}{b_{ij}}$.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Rodiklių reikšmingumų nustatymui sprendžiamas matricos B tikrinių reikšmių ir tikrinių vektorių $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ uždavinys:

$$B \cdot \omega = \lambda \cdot \omega \quad (2)$$

su tikrine reikšme $\lambda = n$, čia n yra porinio palyginimo matricos B eilė – rodiklių skaičius. AHP metodu gauti rodiklių reikšmingumai yra tikrinio vektoriaus, atitinkančio didžiausią tikrinę reikšmę λ_{max} normalizuotos komponentės [7].

Užpildžius porinio palyginimo matricas, būtina patikrinti kiekvienos jų suderinamumą, t. y. nustatyti, ar pildydamas porinio palyginimo matricą ekspertas nepažeidė tranzityvumo savybės. Tam tikslui skaičiuojamas kiekvienos porinio palyginimo matricos suderinamumo indeksas:

$$S_i = \frac{(\lambda_{\max} - n)}{(n-1)}. \quad (3)$$

Jeigu ekspertų porinio palyginimo matricos yra suderintos, tada tikrinamas ekspertų nuomonių suderinamumas. Ekspertų nuomonių suderinamumui nustatyti skaičiuojamas konkordancijos koeficientas W , kurį apibrėžė M. Kendall (1970) [5]. Konkordancijos koeficiento reikšmė apskaičiuojama pagal formulę:

$$W = \frac{12S}{r^2(n^3 - n)}, \quad (4)$$

čia S – efektyvumo rodiklių rangų sumų nuokrypių, nuo bendro vidurkio, kvadratų suma, r – ekspertų skaičius, n – rodiklių skaičius. Tuo atveju, kai ekspertų vertinimai mažai skiriasi – konkordancijos koeficientas artimas 1, kai vertinimai labai skiriasi – konkordancijos koeficientas artimas 0.

Tuo atveju, kai $n > 7$, konkordancijos koeficiento reikšmingumas gali būti nustatytas naudojant χ^2 kriterijų, nes atsitiktinis dydis:

$$\chi^2 = Wr(n-1) = \frac{12S}{rn(n+1)} \quad (5)$$

pasiskirstęs pagal χ^2 skirstinį su $\nu = n-1$ laisvės laipsniu. Iš χ^2 skirstinio lentelės, pagal pasirinktą reikšmingumo lygmenį α ($\alpha = 0,05$ arba $\alpha = 0,01$) su $\nu = n-1$ laisvės laipsniu randama kritinė χ_{krit}^2 reikšmė.

Jeigu pagal (5) formulę gauta χ^2 reikšmė didesnė už χ_{krit}^2 reikšmę, teigiama, kad ekspertų nuomonių suderinamumas yra pakankamas. Priešingu atveju, kai $\chi^2 < \chi_{krit}^2$ teigiama, kad ekspertų nuomonių suderinamumas nėra pakankamas [5].

2.3. TOPSIS metodo algoritmas

TOPSIS metodas aprašytas K. Yoon ir C. L. Hwang (1981) [4]. TOPSIS metodo taikymui pradžioje sudaroma sprendimo matrica X , kurios elementai x_{ij} , $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$. Čia x_{ij} – i -tosios alternatyvos j -tojo rodiklio reikšmė.

Taikant TOPSIS metodą, sprendimų matricos elementai normalizuojami pagal formulę:

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ij}^2}}. \quad (6)$$

Naudojant rodiklių svorius ω_j , $j = \overline{1, n}$ ir sprendimo matricos normalizuotus elementus sudaroma svertinė normalizuota matrica:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \omega_1 \cdot \tilde{x}_{11} & \dots & \omega_n \cdot \tilde{x}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_1 \cdot \tilde{x}_{m1} & \dots & \omega_n \cdot \tilde{x}_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Iš svertinės normalizuotos matricos elementų sudaroma „idealiai geriausia“ alternatyvą pagal formulę:

$$A^+ = \{(\max_i a_{ij} | j \in J), (\min_i a_{ij} | j \in J') | i = \overline{1, m}\} = \{a_1^+, a_2^+, \dots, a_n^+\}, \quad (8)$$

čia J – rodiklių, kurių didesnės reikšmės yra geresnės, indeksų aibė; J' – rodiklių, kurių mažesnės reikšmės yra geresnės, indeksų aibė. „Neigiamai ideali“ alternatyva sudaroma pagal formulę:

$$A^- = \{(\min_i a_{ij} | j \in J), (\max_i a_{ij} | j \in J') | i = \overline{1, m}\} = \{a_1^-, a_2^-, \dots, a_n^-\}. \quad (9)$$

Atstumas tarp lyginamosios i -tosios ir „idealiai geriausios“ A^+ alternatyvų nustatomas skaičiuojant atstumą n -matėje Euklido erdvėje pagal formulę:

$$S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (a_{ij} - a_j^+)^2}, \quad (i = \overline{1, m}), \quad (10)$$

o tarp *i-tosios* ir „neigiamai idealios“ A^- alternatyvų – pagal formulę:

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (a_{ij} - a_j^-)^2}, \quad (i = \overline{1, m}). \quad (11)$$

Galutiniu TOPSIS metodo žingsniu nustatomas kiekvienos *i-tosios* alternatyvos santykinis atstumas iki „idealiai blogiausio“ varianto:

$$C_i = \frac{S_i^-}{S_i^+ + S_i^-}, \quad i = \overline{1, m} \text{ kai } C_i \in [0, 1]. \quad (12)$$

Remiantis C_i reikšmėmis sudaroma alternatyvų prioritentinė eilė. Racionalia alternatyva laikoma ta, kurios C_i reikšmė yra didžiausia [4].

3. Statistiniai metodai sprendimo patikimumui vertinti

Siekiant atlikti rezultatų statistinę analizę, būtina turėti ne vieną rezultatą atvaizduojantį skaičių, o visą rezultatų imtį. 2006 m. V. Podvezko [6] atsitiktinių skaičių generavimą pritaikė daugiakriterinių uždavinių sprendimui, esant neapibrėžtumo sąlygoms, generuodamas rodiklių svorius. Remiantis aprašyta idėja šiame darbe taikomas atsitiktinių dydžių generavimas baigtinės sprendimo matricių aibės sudarymui. Sprendimo matricių generavimui atliekami šie žingsniai:

1. Sudaromos alternatyvų ir rodiklių aibės.

2. Naudojantis pasaulio banko duomenų baze [12], iš prieinamų duomenų sudaroma, kiek galima, sprendimo matricių. Tada galima sudaryti kiekvieno rodiklio reikšmės x_{ij} , $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$ laiko eilutę.

3. Naudojant kiekvieno rodiklio reikšmes x_{ij} , $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$, laiko eilutės duomenims nustatoma mažiausia ir didžiausia to rodiklio reikšmė.

4. Turint mažiausią ir didžiausią kiekvieno sprendimo matricės elemento reikšmę, sugeneruojamas pasirinktas kiekis K kiekvieno elemento reikšmių.

5. Iš gautų sugeneruotų reikšmių sudaroma K sprendimo matricių.

Kiekviena sugeneruota sprendimo matrica yra naudojama skaičiavimuose TOPSIS metodu. Tokiu būdu yra gaunama K kiekvienos alternatyvos racionalumo reikšmių.

Šiame darbe matuojamas kintamasis yra alternatyvos racionalumo reikšmė. Sprendimo gauto TOPSIS metodu patikimumo tikrinimui šiame darbe taikomi šie statistiniai metodai: matuojamo kintamojo normališkumo tikrinimas, jo vidurkio pasikliautinių intervalų skaičiavimas, hipotezių apie dviejų matuojamų kintamųjų dispersijų ir vidurkių lygybes tikrinimas. Ši daugiakriterinio sprendimo patikimumo vertinimo idėja, taikant statistinius metodus, buvo aprašyta L. Ustinovičiaus ir R. Simanavičienės (2011) [10] bei R. Simanavičienės (2013) [9] publikacijose. Tikrinant hipotezes stebima, ar tarp matuojamų kintamųjų – prioritetinėje eilutėje gretimų alternatyvų racionalumo reikšmių – yra vidurkių ar dispersijų lygybė. Jeigu lygybės nėra, tada daroma prielaida, kad gautas alternatyvų rangavimas yra patikimas. Tokiu atveju, kai suranguotų gretimų alternatyvų racionalumo reikšmių vidurkių pasikliautinieji intervalai tarpusavyje nepersidengia, daroma prielaida, kad sprendimo patikimumu statistiškai nėra pagrindo abejoti.

3.1. Duomenų normališkumo tikrinimas Shapiro-Wilko testu

Daugelis hipotezių tikrinimo uždavinių remiasi prielaida, kad stebimas kintamasis yra pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį. Kiekybinių kintamųjų skirstiniai dažniausiai lyginami su normaliuoju. Tokiai hipotezei apie kintamojo skirstinio normalumą patikrinti naudojamas Shapiro-Wilko kriterijus³. Tiriant kintamųjų skirstinius Shapiro-Wilko kriterijus padeda atsakyti į klausimą, ar duomenų skirstinio nuokrypiai nuo normaliojo skirstinio yra esminiai [8]. Atsižvelgiant į planuojamus taikyti modelius, yra svarbu žinoti, ar sprendimo rezultatai nebus iškreipti.

Taikant Shapiro-Wilko kriterijų nulinė hipotezė formuluojama taip: matuojamas kintamasis x_1, x_2, \dots, x_K , pasiskirstęs pagal normalųjį skirstinį. Kriterijaus statistika apskaičiuojama pagal formulę:

³ Angl. *Shapiro-Wilk test*.

$$W = \frac{\left(\sum_{k=1}^K c_k \cdot x_k \right)^2}{\sum_{k=1}^K (x_k - \bar{x})^2} \quad (13)$$

čia c_k – konstanta; \bar{x} – imties vidurkis; x_k – k -tasis imties elementas.

Kuo W reikšmė yra artimesnė vienetui, tuo tiriamų duomenų skirstinys yra artimesnis normaliajam. Nulinė hipotezė atmetama, jeigu W reikšmė yra mažesnė už numatytą kritinę reikšmę [8].

4. Sprendimo patikimumo vertinimas praktiniame uždavinyje

4.1. Daugiakriterinio sprendimo priėmimo uždavinio formulavimas

Daugiakriterinis sprendimo priėmimo uždavinys pradedamas formuluoti nuo problemos užrašymo. Šiame straipsnyje nagrinėjama šalies pasirinkimo problema. Siekiant nustatyti, kurioje šalyje iš pasirinktų (Anglija, Vokietija, Danija, Norvegija, Švedija, Australija) būtų geriausia gyventi, buvo sprendžiamas daugiakriterinis sprendimo priėmimo uždavinys.

Daugiakriterinį sprendimo priėmimo uždavinį formuluojame remiantis 2.1 poskyryje aprašytais etapais:

1. Galimų alternatyvų aibę sudaro šešios šalys: Anglija, Vokietija, Danija, Norvegija, Švedija, Australija. Sudaryta alternatyvų aibė $A = (A_1, A_2, \dots, A_6)$.

2. Pasirinktomis alternatyvoms nustatomi jas apibūdinantys rodikliai. Rodikliai yra pasirenkami iš Pasaulio Bankų duomenų bazės [12]: užsienio investicijos (%) (R_1), pajamos (USD) (R_2), išmetamas CO₂ kiekis (%) (R_3), karinės išlaidos (USD) (R_4), prekių ir paslaugų eksportas (vnt.) (R_5), besimokančių vaikų skaičius (vnt.) (R_6), sveikatos išlaidos vienam gyventojui (USD) (R_7), BVP dydis (USD) (R_8), vidutinė tikėtina gyvenimo trukmė (m) (R_9), gyventojų skaičiaus augimas (vnt.) (R_{10}) ir turizmas (vnt.) (R_{11}). Sudaryta rodiklių aibė $R = (R_1, R_2, \dots, R_{11})$.

3. Kiekvienam rodikliui nustatoma jo kryptis, ar jis bus minimizuojamas ar maksimizuojamas. Nagrinėjamu atveju, vienas rodiklis R_3 – išmetamų CO₂ dujų kiekis – yra minimizuojamojo pobūdžio. Visus kitus rodiklius siekiama maksimizuoti.

4. Atsižvelgiant į rodiklių reikšmių fiksavimo metus (2005–2012 m.), duomenų bazėje [12] sudarytos kiekvienos rodiklio reikšmės imtys po 8 elementus. Iš šių duomenų imčių sudaromos 8 sprendimo matricos.

5. Rodiklių reikšmingumams nustatyti buvo sudaryta 12 ekspertų grupė, kurie poromis lygino rodiklius pagal Saaty skalę (1 lentelė). Rodiklių svoriai buvo skaičiuojami porinio palyginimo metodu AHP (2 formulė) [7]. Buvo tikrinamas porinio palyginimo matricių suderinamumas (pagal 3 formulę). Matricių suderinamumas buvo pakankamas. Tikrinant ekspertų nuomonių suderinamumą pagal (4 ir 5) formules, nustatyta, kad ekspertų nuomonių suderinamumas yra pakankamas. Tolimesniuose skaičiavimuose naudojami rodiklių reikšmingumai, kurie pateikti 2 lentelėje [1].

2 lentelė. Rodiklių svoriai

Rodiklio Nr.	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11
Rodiklio svoris	0,0428	0,2200	0,0934	0,1201	0,0599	0,0657	0,0842	0,1107	0,0920	0,0894	0,0219

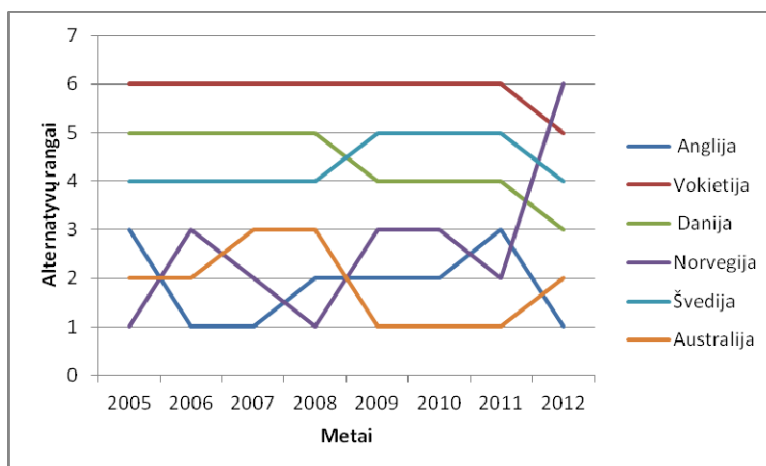
4.2. Uždavinio sprendimas TOPSIS metodu

Geriausios alternatyvos pasirinkimo uždavinys sprendžiamas sudarant sprendimo matricas iš 2005–2012 m. duomenų. Skaičiavimams TOPSIS metodu buvo naudojamos 8 sprendimo matricos ir 12 rodiklių reikšmingumo reikšmės (2 lentelė). Sprendimo, gauto TOPSIS metodu, rezultatai pateikti 3 lentelėje.

3 lentelė. Sprendimo, gauto TOPSIS metodu, rezultatai

Alternatyvos metai	A1 Anglija	A2 Vokietija	A3 Danija	A4 Norvegija	A5 Švedija	A6 Australija
2005	0,6001	0,1763	0,2337	0,6946	0,2457	0,6186
2006	0,729	0,1748	0,1909	0,3398	0,2289	0,5512
2007	0,7479	0,1751	0,2078	0,5757	0,2651	0,4714
2008	0,6474	0,2026	0,2395	0,6976	0,258	0,5402
2009	0,6629	0,2243	0,2723	0,6463	0,2326	0,739
2010	0,7005	0,1882	0,2494	0,3201	0,2175	0,7149
2011	0,3558	0,2155	0,3177	0,6617	0,2578	0,7692
2012	0,7293	0,2041	0,267	0,1925	0,227	0,5791

Stebint sprendimo, gauto TOPSIS metodu, rezultatus (lentelė 3) galima daryti išvadą, kad tų pačių alternatyvų santykiniai atstumai iki „idealiai blogiausio“ varianto bėgant metams nėra pastovūs. Pavyzdžiui, pirmoji alternatyva – Anglija, 2005 m. yra antroje vietoje pagal atstumą iki „idealiai blogiausio“ varianto, 2006 m. – pirmoje, o 2011 m. – trečioje vietoje. Šešių alternatyvų rangų kitimas bėgant metams pavaizduotas 1 pav.



1 pav. Sprendimo, gauto TOPSIS metodu, rangai

1 pav. matyti, kad alternatyvų prioritetiškumo tvarka bėgant metams keičiasi. Remiantis 3 lentelėje ir 1 pav. pateikta informacija, negalima nustatyti, kuri alternatyva geriausia. Siekiant gauti apčiuopiamą rezultatą, skaičiuojami alternatyvų racionalumo reikšmių vidurkiai (4 lentelė).

4 lentelė. Sprendimo, gauto TOPSIS metodu, rezultatų vidurkiai

Alternatyvos	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Vidurkiai	0,6466	0,1951	0,2473	0,5160	0,2416	0,6230
Rangai	1	6	4	3	5	2

Apskaičiavus vidurkius pastebėta, kad alternatyva A_1 – Anglija pagal pasirinktus rodiklius yra tinkamiausia gyvenimui šalis. Pagal tinkamumą antroje vietoje Australija, trečioje – Norvegija, ketvirtoje – Danija, penktoje – Švedija, šeštoje – Vokietija. Sudaroma tokia alternatyvų prioritetiškumo eilutė: $A_1 > A_6 > A_4 > A_3 > A_5 > A_2$.

4.3. Pradinių duomenų paklaidų įvertinimas ir imitacinis modeliavimas

Sprendžiant daugiakriterinį sprendimo priėmimo uždavinį svarbu ne tik gauti rezultatą, bet ir įsitikinti, ar gautas rezultatas yra patikimas. Sprendimo patikimumo analizei šiame darbe siūloma taikyti statistinius metodus. Kiekvienam rodikliui buvo galima surasti po 8 reikšmes, bet tai per maža imtis, norint atlikti statistinę analizę. Norint padidinti pradinių duomenų imtį, taikomas statistinis imitavimas – atsitiktinių skaičių generavimas. Rodiklių reikšmių generavimui buvo pasirinktas tolygusis dėsnis. Pagal pirmiau aprašytą generavimo principą (3 skyrius) sugeneruota po 100 kiekvienos alternatyvos kiekvieno rodiklio atsitiktinių reikšmių ir iš jų sudaryta 100 sprendimo matricių.

Naudojant sugeneruotas matricas ir rodiklių reikšmingumus (2 lentelė), TOPSIS metodu buvo gautos 6 matuojamo kintamojo – alternatyvų racionalumo reikšmių aibės, po 100 kiekvienos alternatyvos racionalumo reikšmių. Apskaičiavus kiekvienos reikšmių aibės vidurkį, gauti alternatyvų racionalumo reikšmių vidurkiai (5 lentelė).

5 lentelė. Sprendimo, gauto TOPSIS metodu, rezultatų vidurkiai, po atsitiktinių skaičių generavimo

Alternatyvos	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Vidurkiai	0,6454	0,1901	0,2819	0,5352	0,2698	0,6093
Rangai	1	6	4	3	5	2

Remiantis 5 lentelėje pateiktais alternatyvų racionalumo reikšmių vidurkiais, galima teigti, alternatyvų prioritetiškumo eilutės iš pradinių duomenų ir iš sugeneruotų sutapo, t. y. $A_1 > A_6 > A_4 > A_3 > A_5 > A_2$.

4.4. Duomenų normališkumo tikrinimas

Shapiro-Wilko testo skaičiavimas buvo atliktas naudojant programinę įrangą R. Gautos kritinės reikšmės ir išvada dėl duomenų normališkumo, t. y. buvo tikrinama hipotezė, ar duomenų skirstinys neturi esminių nukrypimų nuo normaliojo skirstinio. Tikrinimo rezultatai pateikti 6 lentelėje. Hipotezei tikrinti buvo pasirinktas reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0,05$.

6 lentelė. Shapiro-Wilko testo taikymo rezultatai

Imties Nr.	A1	A2	A3	A4	A5	A6
<i>p</i> – reikšmė	0,8393	0,8419	0,3143	0,2863	0,7937	0,9233
Išvada apie H_0	Priimame	Priimame	Priimame	Priimame	Priimame	Priimame

Pritaikius Shapiro-Wilko testą, nustatyta, kad šios duomenų aibės – šešios alternatyvų racionalumo reikšmių aibės – neturi esminių nukrypimų nuo normaliojo skirstinio. Remiantis gautais rezultatais apie alternatyvų racionalumo reikšmių aibių normališkumą, galima tikrinti parametrines hipotezes apie vidurkių ir dispersijų lygybę.

4.5. Hipotezių apie dispersijų ir vidurkių lygybę tikrinimas

Atitinkamai apskaičiuotos kiekvienos alternatyvos racionalumo reikšmių aibės dispersijos:

$$s_1^2 = 0,0075, s_2^2 = 0,0004, s_3^2 = 0,0013, s_4^2 = 0,0309, s_5^2 = 0,0031, s_6^2 = 0,0109.$$

Gautos empirines dispersijas lyginamos poromis – s_1^2 ir s_2^2 , s_1^2 ir s_3^2 ir t. t. Kai reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0,05$, tai $F_{\alpha/2}(100,100) = 1,39$. Galima daryti išvadą, kad nei vienos tikrinamos alternatyvų racionalumo reikšmių aibių poros dispersijos nėra lygios.

Remiantis šiais rezultatais, toliau buvo tikrinamos hipotezės apie vidurkių lygybę nelygių dispersijų atveju. Tikrinimas vykdomas poromis. Hipotezės tikrinimas paremtas Stjudento kriterijumi. Pradžioje apskaičiuojami kiekvienos alternatyvos racionalumo reikšmių vidurkiai:

$$\bar{x}_1 = 0,6454, \bar{x}_2 = 0,1901, \bar{x}_3 = 0,2819, \bar{x}_4 = 0,5352, \bar{x}_5 = 0,2698, \bar{x}_6 = 0,6093.$$

Pasirenkamas reikšmingumo lygmuo $\alpha/2 = 0,025$. Apskaičiuota k reikšmė lygi 99. Hipotezės tikrinimo rezultatai pateikti 7 lentelėje.

7 lentelė. Hipotezės apie vidurkių lygybę tikrinimo rezultatai

Lyginamos imtys	$ t $ reikšmė	$t_{\alpha/2, k}$ reikšmė	Išvados
(A1,A2)	51,2252	1,980	Vidurkiai nėra lygūs
(A1,A3)	38,7492	1,960	Vidurkiai nėra lygūs
(A1,A4)	5,6236	1,960	Vidurkiai nėra lygūs
(A1,A5)	36,4815	1,960	Vidurkiai nėra lygūs
(A1,A6)	2,6613	1,960	Vidurkiai nėra lygūs
(A2,A3)	22,2647	1,960	Vidurkiai nėra lygūs
(A2,A4)	19,5062	1,980	Vidurkiai nėra lygūs
(A2,A5)	13,4717	1,960	Vidurkiai nėra lygūs
(A2,A6)	39,43502	1,980	Vidurkiai nėra lygūs
(A3,A4)	14,1158	1,980	Vidurkiai nėra lygūs
(A3,A5)	1,8241	1,960	Vidurkiai lygūs
(A3,A6)	29,6414	1,960	Vidurkiai nėra lygūs
(A4,A5)	14,3933	1,980	Vidurkiai nėra lygūs
(A4,A6)	3,6243	1,960	Vidurkiai nėra lygūs
(A5,A6)	28,6929	1,960	Vidurkiai nėra lygūs

Iš 7 lentelėje pateiktų rezultatų galima pastebėti, kad hipotezė apie vidurkių lygybę, alternatyvų A3 ir A5 racionalumo reikšmių imčių atveju, buvo priimta, visais likusiais atvejais hipotezė apie vidurkių lygybę atmesta. Sprendimo patikimumui vertinti taip pat buvo skaičiuojami vidurkių pasikliautiniai intervalai.

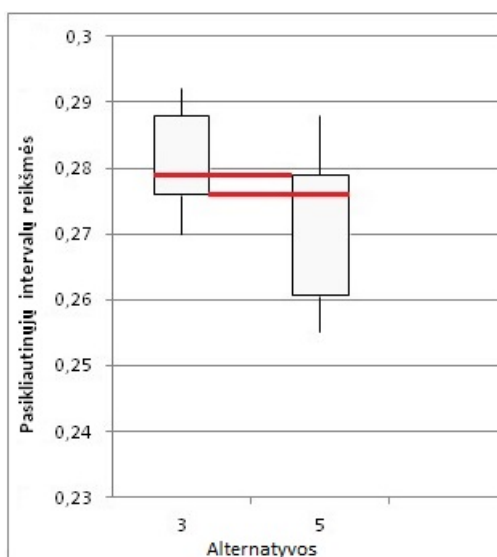
4.6. Vidurkių pasikliautinąo intervalo skaičiavimas

Kadangi matuojamas kintamasis tenkina normališkumo sąlygą, tai jo vidurkiams galima skaičiuoti pasikliautinuosius intervalus. Gauti rezultatai pateikti 8 lentelėje.

8 lentelė. Vidurkių pasikliautinieji intervalai

Imties Nr.	A1	A2	A3	A4	A5	A6
\bar{x}_i	0,6454	0,1901	0,2819	0,5352	0,2698	0,6093
$[\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2]$, $t_{0,025}(99) = 1,96$	[0,6312; 0,6596]	[0,1867; 0,1935]	[0,2760; 0,2878]	[0,5064; 0,5640]	[0,2607; 0,2789]	[0,5922; 0,6265]
Intervalo ilgis	0,0284	0,0069	0,0118	0,0577	0,0182	0,0343

Iš gautos vidurkių pasikliautinųjų intervalų lentelės (8 lentelė) matoma, kad pasikliautinųjų intervalų ilgiai skirtingi. Pastebėta, kad alternatyvų, kurių atstumai iki „idealiai blogiausio“ varianto (3 lentelė), gauti kiekvienais metais, yra stabilesni, pavyzdžiui, alternatyvos A_2 atveju, vidurkių pasikliautinieji intervalai yra trumpesni. Galima ir grafiškai pavaizduoti alternatyvų A_3 ir A_5 racionalumo reikšmių vidurkių pasikliautinųjų intervalų persidengimą su $\alpha = 0.05$ (2 pav.).



2 pav. Alternatyvų A_3 ir A_5 racionalumo reikšmių vidurkių pasikliautinųjų intervalų persikirtimas su $\alpha = 0.05$.

Iš gautų rezultatų matyti, kad TOPSIS metodu vertinant alternatyvas A_3 ir A_5 dalis racionalumo reikšmių patenka ir į abiejų alternatyvų racionalumo reikšmių vidurkių pasikliautinuosius intervalus. Jeigu turėtume tik šias sutampančias alternatyvų racionalumo reikšmes, negalima būtų nustatyti, kuri alternatyva turi didesnę preferenciją.

5. Išvados

Atlikus keletas alternatyvų daugiakriterinį vertinimą TOPSIS metodu, siekiama išrikiuoti alternatyvas prioritetine eilute ir nustatyti, kuri alternatyva yra geriausia. Kai turime vieną pradinių duomenų rinkinį – vieną sprendimo matricą, gauname vienintelį rezultatą. Tuo atveju alternatyvos vieninteliu būdu išrikiuojamos prioritetine eilute. Tačiau pasitaiko situacijų, kai turime keletą sprendimo matricų, pavyzdžiui, tų pačių alternatyvų, tų pačių rodiklių reikšmės fiksuojamos kasmet. Tokiu atveju atlikus skaičiavimus TOPSIS metodu, su kiekvienu metų duomenimis, alternatyvų prioritetiškumas kasmet gali ir nesutapti. Todėl priimant sprendimą, atsizvelgiant į keletą metų nagrinėjamų rodiklių reikšmes, kyla abejonių dėl daugiakriterinio sprendimo patikimumo.

Šiame darbe aprašoma, kaip būtų galima pritaikyti žinomus statistinius metodus daugiakriterinio sprendimo, gauto TOPSIS metodu, patikimumui įvertinti. Tiek atsitiktinių dydžių generavimas, tiek statistinių hipotezių tikrinimas ir

pasikliautiniųjų intervalų skaičiavimas yra gerai žinomi statistiniai metodai, tik kol kas nepraktikuojami daugiakriterinio sprendimo patikimumui vertinti.

Atlikus skaičiavimus konkrečiam atvejui, buvo pastebėta: jeigu matuojamo kintamojo – alternatyvų racionalumo reikšmių – vidurkių pasikliautiniai intervalai persikerta, tai ir hipotezės apie tų alternatyvų racionalumo reikšmių vidurkių lygybę bus priimtos.

Vadinasi ateityje galima rekomenduoti daugiakriterinio sprendimo patikimumui taikyti minėtus statistinius metodus. Jeigu alternatyvų racionalumo reikšmės tenkina normališkumo sąlygą, daugiakriterinio sprendimo patikimumui įvertinti galima: arba tikrinti alternatyvų racionalumo reikšmių vidurkių pasikliautiniųjų intervalų persikirtimą, arba tikrinti hipotezes apie alternatyvų racionalumo reikšmių vidurkių lygybę.

Literatūra

1. Cibulskaitė J. 2015. Sprendimo gauto TOPSIS metodu patikimumo statistinis tyrimas, *Bakalauro darbas*.
2. Čekanavičius, V.; Murauskas, G. 2000: *Statistika ir jos taikymai I*. Vilnius: TEV.
3. Ginevičius, R.; Podvezko, V. 2007: Some problems of evaluating multicriteria decision methods, *International Journal of Management and Decision Making*, 8(5/6): p. 527-539.
4. Hwang, C. L.; Yoon, K. 1981: Multiple attribute decision making – methods and applications. *A State of the Art Survey*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
5. Kendall, M. 1970. *Rank correlation methods*. London: Griffin.
6. Podvezko V. 2006. Neapibrėžtumo įtaka daugiakriteriniams vertinimams, *Verslas: Teorija ir praktika (Business: Theory and practice)*, 7(2), p. 81-88. Saaty, T. L. 1980. *The Analytic Hierarchy Process*. M.Graw-Hill, New York.
7. Saaty, T. L. 1980. *The Analytic Hierarchy Process*. M.Graw-Hill, New York.
8. Shapiro S. S.; Wilk M. B. 1965: An Analysis of Variance for Test of Normality. [Interaktyvus]. *Biometrika*. 52 (3). Prieiga per internetą: <<http://www.math.utah.edu/~morris/Courses/ShapiroWilk.pdf>>.
9. Simanavičienė R. 2011. Kiekybinių daugiatikslių sprendimo priėmimo metodų jautrumo analizė, *Daktaro disertacija*. Vilnius: Technika.
10. Simanavičienė R.; Ustinovičius L. 2011. Daugiatikslių sprendimo priėmimo metodų jautrumo analizė taikant Monte Karlo modeliavimą, *Informacijos mokslai*. 57: p. 182-190.
11. Simanavičienė R. 2013. Stastisinių metodų taikymas daugiatikslių sprendimų patikimumui įvertinti, *Informacijos mokslai*. 65: p. 120-126.
12. *The World Bank* [interaktyvus]. [žiūrėta 2014-12-11]. Prieiga per internetą: <<http://data.worldbank.org/>>.
13. Triantaphyllou, E. 2000: *Multi-criteria decision making methods a comparative study*. Boston: Kluwer Academic Publishers. 320 p.

STATISTICAL ANALYSIS OF THE RELIABILITY OF A DECISION OBTAINED BY THE TOPSIS METHOD

Rūta Simanavičienė, Jovita Cibulskaitė

Abstract. The tasks of making the most appropriate decisions taking into account a number of criteria are dealt with in various fields such as engineering, industry, finance, economics and others. If the aim is to arrange the alternatives in a priority line according to quantitative attributes, then multiattribute decision-making methods are suitable. Analysts using these methods usually do not take into account initial data errors – deviations in attribute values, in which case the decision may be unreliable. In this article, several statistical analysis methods are proposed for the multicriteria decision to measure reliability: formulation of statistical hypotheses and calculation of confidence intervals for parameters. Based on statistical analysis results, conclusions about the reliability of a multicriteria decision obtained using the TOPSIS method are formulated.

Keywords: multicriteria problem, reliability of decision, TOPSIS method, statistical hypothesis, confidence interval.