НАУЧНЫЕ ТРУДЫ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ ЛИТОВСКОЙ ССР.
ПЕДАГОГИКА И ПСИХОЛОГИЯ III, 1962

О НЕКОТОРЫХ ОШИБКАХ, ЧАСТО ДОПУСКАЕМЫХ ПРИ РАССМОТРЕНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В УСКОРЕННО ДВИЖУЩИХСЯ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

Л. КУЛЬВЕЦАС

В учебниках физики для средних и высших школ, в методической литературе для учителей физики и в других аналогичных источниках можно найти описание различных механических явлений в ускоренно движущихся системах отсчета (ускоряемый вагон, в котором помещен математический маятник или прикреплен на пружине шар; ускоренно поднимающийся или опускающийся лифт с пружинными весами, на которых подвешен груз; опыты Любимова и т. п.). Задачи на эту тему очень распространены как в практике преподавания механики, так и в сборниках вопросов и задач. К сожалению, очень часто разбор и решение такого рода задач, равно как и описание явлений в ускоренно движущихся системах, страдают существенными недостатками; порой они просто ошибочны.

Ниже рассмотрены типичные примеры таких ошибок и указаны причины их возникновения.

1. В методическом пособии «Уроки физики»[1] приведен рисунок прибора Любимова (рис. 1) для демонстрации отсутствия взаимодействия между грузом и подставкой при одновременном их падении. Под рисунком написано:

«Падающий груз не действует на тела, связывающие его с опорой. Положение груза: А — до падения, Б — при падении».

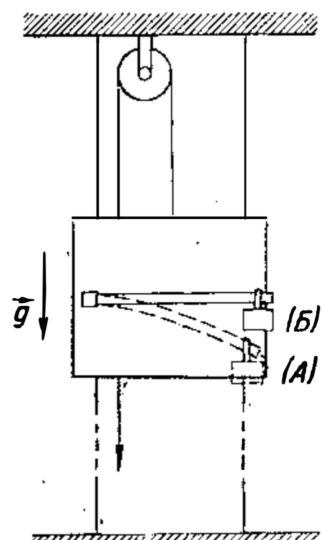

Рис. 1

Но это неверно, ибо с момента пуска прибора вниз груз начнет совершать колебания вокруг положения (Б). Амплитуда колебаний будет равна дуге АБ. Это явствует из того, что в системе отсчета, движущейся поступательно вместе с доской, на груз действуют три силы: его вес $m\vec{g}$, сила инерции переносного движения — $m\vec{g}$ и сила упругости ножовки. Последняя и обусловливает колебания груза, амплитуда которых определяется его началь-

[1] Л. С. Дмитриев, Ю. П. Европин и Н. А. Щербаков, Уроки физики, М., 1957, стр. 50.

ным отключением от нового положения равновесия (Б) (вследствие наличия трения в приборе и сопротивления воздуха колебания груза будут постепенно затухать).

Аналогичные ошибки в объяснении опытов Любимова встречаются очень часто. А. Б. Млодзеевский и Р. В. Телеснин[2], описывая другой прибор, в котором на пружинах, прикрепленных к раме, висят три гири разной массы (см. рис. 2), утверждают, что «все три гири, до начала падения растягивавшие пружины на разную длину, во время падения будут подняты сократившимися пружинами до одинаковой высоты», а в задачнике В. Г. Зубова и В. П. Шальнова[3], где изображен такой же прибор Любимова, просто сказано, что при свободном падении «деформации и натяжения пружин отсутствуют. Все пружины находятся на одном уровне». С. П. Стрелков[4], рассматривая только один груз на пружине, подвешенной к раме, утверждает, что «во время падения пружина, растянутая раньше грузиком, сожмется так, как если бы на ней не было никакого груза... Груз не может теперь ее растянуть, ибо сила инерции и сила тяготения ... уравновешивают друг друга».

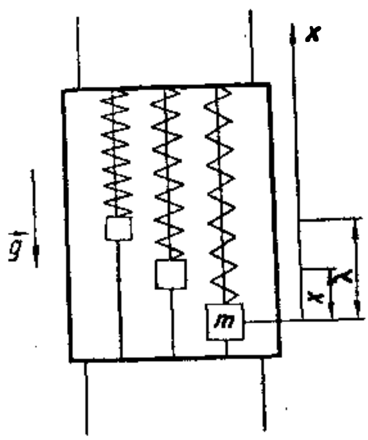

Рис. 2

Несостоятельность таких утверждений очевидна. Уравнение движения груза относительно рамы есть

$$m\ddot{x} = -mg + c(\lambda - x) + mg,$$

где m — масса груза, x — его абсцисса, отсчитываемая от положения равновесия при неподвижной раме (рис. 2), λ — статическое удлинение пружины, g — ускорение свободного падения, c — жесткость пружины. Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, есть

$$x = \lambda\left(1 - \cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right).$$

Оно показывает, что груз совершает гармонические колебания вокруг нового положения равновесия $x=\lambda$ с амплитудой λ и частотой $\sqrt{c/m}$. Так как по условию задачи c одинаково для всех пружин, то времена поднятия грузов до уровня $x=\lambda$ относятся как $\sqrt{m_1}:\sqrt{m_2}:\sqrt{m_3}$, т. е. грузы никогда не будут находиться на одном уровне.

Заметим, что ошибочность утверждений всех вышеупомянутых авторов вытекает из одного и того же обстоятельства: они не учитывают действия силы упругости пружины. Это правда, что — как подчеркивает П. С. Стрелков — сила инерции и сила тяготения уравновешивают друг друга; но ведь остается еще действие силы упругости пружины, вызывающей, как правило, колебательное движение!

В связи с изложенным, отметим еще следующую интересную задачу[5]: три шарика равных масс подвешены на пружинах с одинаковой

[2] А. Б. Млодзеевский и Р. В. Телеснин, Лекционные демонстрации по физике, Общая механика, М, 1954, стр. 53, 54.

[3] В. Г. Зубов и В. П. Шальнов, Задачи по физике, М., 1959, стр. 23, 160.

[4] С. П. Стрелков, Механика, М., 1956, стр. 139—140.

[5] М. П. Шаскольская и И. А. Эльцин, Сборник избранных задач по физике, М., 1959, стр. 26, 122.

упругостью так, что расстояния между ними одинаковы (рис. 3а). Поэтому центр тяжести системы совпадает с центром второго шара. Если обрезать нить, удерживающую первый (верхний) шар, то система будет падать, причем ускорение центра тяжести должно быть $3mg$: $3m=g$. Но верхняя пружина тянет второй шар вверх сильнее, чем нижняя пружина тянет его вниз и, следовательно, в начальный момент центр второго шара

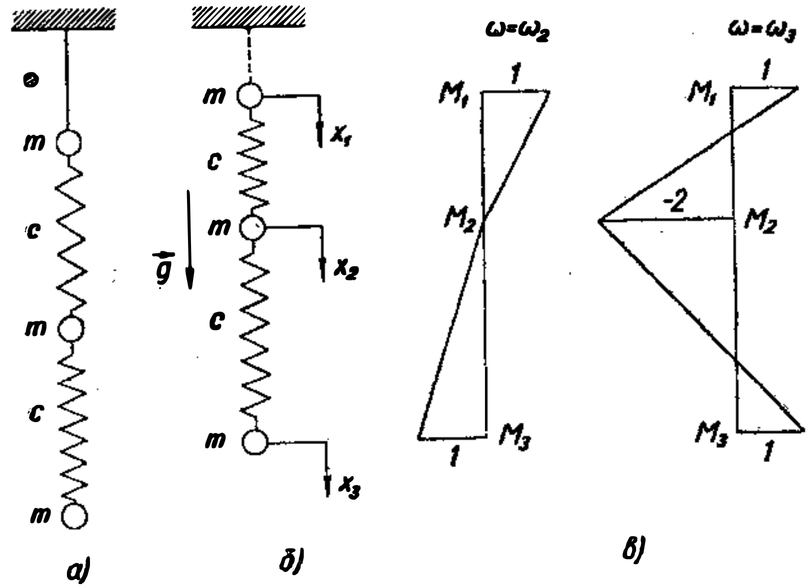

Рис. 3

будет иметь ускорение меньше g. Получается как бы противоречие. В чем дело?

В ответе указывается, что длина пружин в недеформированном состоянии должна быть различна. «При свободном падении же обе пружины должны быть не растянутыми, т. е. они сожмутся до нормальной длины (их деформации исчезнут)» и, значит, расстояния между центрами шариков не будут одинаковы. Таким образом, центр второго шара после начала падения перестанет быть центром тяжести системы.

Утверждение, что при падении обе пружины будут не растянуты, сожмутся до нормальной длины — неверно. В системе отсчета, свободно падающей с ускорением g, шарики совершают сложные колебания под действием сил упругости пружин. [Соответствующий расчет показывает, что относительное движение системы шариков — системы с тремя степенями свободы — это наложение трех гармонических колебаний (нормальных колебаний) с частотами $\omega_1=0$, $\omega_2=\sqrt{\frac{c}{m}}$, $\omega_3=\sqrt{\frac{3c}{m}}$, где m — масса одного шарика, c — жесткость пружин. Конечные уравнения движения системы следующие:

$$x_1=\frac{5mg}{3c}-\frac{3mg}{2c}\cos\omega_2 t-\frac{mg}{6c}\cos\omega_3 t$$

$$x_2=\frac{5mg}{3c}+\frac{mg}{3c}\cos\omega_3 t$$

$$x_3=\frac{5mg}{3c}+\frac{3mg}{2c}\cos\omega_2 t-\frac{mg}{6c}\cos\omega_3 t,$$

где x_1, x_2, x_3 (см. рис. 3б) отсчитываются от положений шариков при натуральной длине пружин (обобщенные координаты системы). Формы главных колебаний показаны на рис. 3в]. Поэтому лучше при элементарном решении данной задачи сказать, что ускорение шарика M_2 «не является ускорением центра тяжести системы, так как при движении расстояние между шариками меняется под действием пружинок»[6], хотя и этот ответ основан только на интуиции, ибо без решения задачи трудно сколько-нибудь точнее предвидеть характер изменения взаимных расстояний шариков (кроме, разумеется, момента $t=0$). Вряд ли целесообразно предлагать эту задачу учащемуся средней школы.

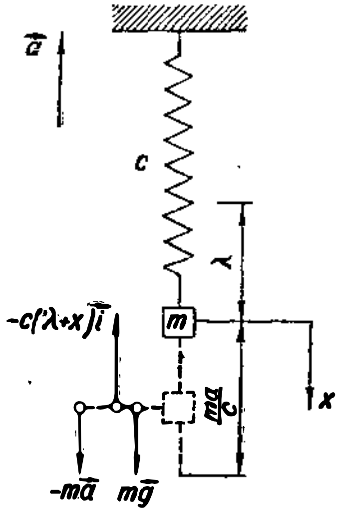

Рис. 4

2. В первой части стабильного учебника физики для средней школы А. В. Перышкина и В. В. Крауклиса помещена задача (зад. 16 упр. 32, стр. 107): «на пружинных весах подвешен груз в 14 *кГ*. Какой вес покажут они, если двигать их вертикально вверх с ускорением в 28 *см/сек*^{2}? Если двигать вниз с тем же ускорением? Если двигать вверх и вниз с ускорением в 490 *см/сек*^{2}? Какой вес покажут весы, если они вместе с подвешенным грузом будут свободно падать?»

Ответ на первый вопрос дан такой: 14,4 *кГ* и 13,6 *кГ*; на второй — 21 *кГ* и 7 *кГ*, на третий — 0 *кГ*.

Подсчитаем показания весов, приняв, что они движутся вверх с ускорением a. Уравнение движения груза (рис. 4)

$$m\ddot{x}=mg-c(\lambda+x)+ma=-cx+ma, \tag{1}$$

где λ — статическое удлинение пружины. Решение его, удовлетворяющее условиям $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$, имеет вид:

$$x=\frac{ma}{c}\left(1-\cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right). \tag{2}$$

Это — уравнение гармонических колебаний груза с амплитудой $\frac{ma}{c}$ около положения равновесия $x=x_р=\frac{ma}{c}$. Обозначив показание весов через n, имеем:

$$n=c\,(\lambda+x)=mg+cx,$$

т. е.

$$n=mg+ma\left(1-\cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right). \tag{3}$$

Таким образом, показание весов периодически меняется в границах

$$n_{\min}\leqslant n\leqslant n_{\max},$$

где

$$n_{\min}=mg,\ n_{\max}=mg+2ma. \tag{4}$$

Показание весов в равновесном положении груза $x=x_р$

$$n_р=mg+cx_р=mg+ma. \tag{5}$$

[6] С. П. Стрелков, И. А. Эльцин, И. А. Яковлев, Сборник задач по общему курсу физики, т. I, М., 1960, стр. 186.

Заменив a на $-a$, получим показание весов при опускании их вниз с ускорением a:

$$n' = mg - ma\left(1 - \cos\sqrt{\frac{c}{m}}\,t\right).$$

Теперь

$$n'_{min} = mg - 2ma;\ n'_{max} = mg;\ n'_p = mg - ma.$$

В данной задаче величина ma при $a=28$ *см/сек*^{2} равна 0,4 *кГ*, а при $a=490$ *см/сек*^{2} — 7 *кГ*. Таким образом, в ответе указаны показания весов в равновесных положениях груза x_p и x'_p. Но показание весов в случае $a=28$ *см/сек*^{2} меняется в интервале

$$14\ кГ \leqslant n \leqslant 14{,}8\ кГ \text{ (при движении вверх)},$$

$$13{,}2\ кГ \leqslant n' \leqslant 14\ кГ \text{ (при движении вниз)}.$$

В случае же $a=490$ *см/сек*^{2}

$$14\ кГ \leqslant n \leqslant 28\ кГ \text{ (при движении вверх)},$$

$$0\ кГ \leqslant n' \leqslant 14\ кГ \text{ (при движении вниз)}.$$

В последнем случае особенно ярко обнаруживается несостоятельность ответа — «показание весов 21 *кГ* и 7 *кГ*». Разумеется, присутствие трения делает колебания груза затухающими, и первый размах будет несколько меньше вычисленной границы $\frac{ma}{c}$. Но колебательный характер движения груза и, следовательно, показаний весов — по крайней мере в начальном этапе движения — не позволяет дать однозначного ответа на вопрос задачи. Поэтому во всех подобных случаях в условии задачи обязательно в какой-то форме указать, что речь идет о показаниях весов, растяжениях пружин, отклонениях маятников и т. п. *после того, как затухнут колебания* этих весов, пружин, маятников и т. п. К сожалению, это требование почти никем не соблюдается; наоборот, часто делают оговорки в противоположном направлении — отвлекаются от действия сил трения. Напр., в цитированной выше книге С. П. Стрелкова «Механика» на стр. 140, после описания опытов Н. А. Любимова, читаем: «Все эти явления легко объяснить учитывая действие сил инерции и *пренебрегая силами трения*» (подчеркнуто мною. — Л. К.). Но при такой постановке вопроса колебания в неинерциальной системе отсчета грузов, маятников и т. п. будут незатухающими (закон сохранения энергии!), и всякие утверждения об исчезновении деформации пружин, ножовок и т. п. — ошибочны, как это показано на примерах в п. 1.

Вот еще пример, поясняющий вышесказанное. Вопрос[7]: «С каким ускорением поднимается лифт, если пружинные весы с гирей в 1 *кГ* в момент начала подъема показывают 1,2 *кГ*?» Ответ — 1,96 *м/сек*^{2}.

Необращая внимания на неудачное сформулирование условия (в *момент начала подъема*, т. е. при $t=0$ весы не могли показывать ничего другого, кроме 1 *кГ*!), ответ нельзя признать правильным, так как он дает показание весов при равновесном положении гири (относительно движущегося лифта). Если же показание весов 1,2 *кГ* соответствует равновесному положению гири, то в «момент начала подъема» весы

[7] П. А. Рымкевич и др., Сборник вопросов и задач по физике, Л., 1957, зад. 319, стр. 47.

должны были показывать 1,4 *кГ*! (см. (4)). Наоборот, если $n_{max} = 1{,}2\,кГ$, то $n_p = 1{,}1\,кГ$, и ускорение лифта должно получиться в два раза меньше, чем в ответе, — 0,98 *м/сек²*! Значит, или ответ данной задачи неправилен, или данные не соответствуют ответу. Аналогичное можно сказать по отношению к задаче 319 в этом же сборнике, в которой, в сущности, заменены только численные значения физических величин.

Отметим, что ошибки, подобные рассмотренным, имеются и в общепризнанных заграничных учебниках физики. Например, в учебнике Гримзеля[8] есть такое рассуждение: «Пусть масса m висит на пружинных весах, находящихся в лифте. В тот самый момент, когда лифт начинает равномерно ускоренно подниматься вверх, стрелка весов отклоняется вниз, как будто вес массы m стал больше. Причиной этого является инерция массы m. Сначала масса не участвует в движении вверх лифта, ибо она старается поддержать свое состояние покоя относительно Земли. Вследствие натяжения пружины поднимаемых весов массе сообщается некоторое ускорение. Когда с увеличением растяжения пружины это ускорение становится равным ускорению подъема лифта вместе с весами, пружина больше не растягивается. Она остается в достигнутом отклоненном положении до тех пор, пока лифт поднимается вверх с тем же ускорением».

В этом рассуждении совсем упущено из виду то обстоятельство, что масса (лучше было бы сказать *тело*), достигнув нового положения равновесия в движущемся лифте с определенной скоростью[9], не может мгновенно терять эту скорость и остановиться в этом положении; она по инерции проходит это положение и — вследствие симметрии поля сил — отклоняется в противоположную сторону на такое расстояние, на котором она находилась от него в начальный момент времени $\left(\text{расстояние } \frac{ma}{c}\right)$. Таким образом, в цитированном рассуждении просмотрен факт колебательного движения массы m.

Аналогичную ошибку находим также у Р. В. Поля[10] и В. Шальрейтера[11].

3. Обратимся теперь к учебнику общей физики С. Э. Фриша и А. В. Тиморевой[12]. В нем следующим образом объясняется возникновение сил инерции в ускоренно движущейся системе отсчета (вагоне): «Предположим, что шар, лежащий на полке, скреплен со стенкой вагона пружиной *С*... *Полку будем считать абсолютно скользкой*, так что *между ней и шариком не возникает никаких сил трения*... Тогда при ускорении вагона (рис. 5) шар будет отставать от вагона *лишь до тех пор*, пока пружина не растянется настолько, что появившаяся, благодаря растяжению пружины, сила не окажется достаточной, чтобы сообщить шару ускорение $\vec{W}$, равное ускорению вагона» (подчеркнуто мною. — Л. К.).

---

[8] Grimsehl, Lehrbuch der Physik, 1, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957, стр. 44.

[9] Эту скорость v нетрудно подсчитать пользуясь интегралом энергии: согласно (1), потенциальная энергия $V(x) = \frac{cx^2}{2} - max$; тогда $\frac{1}{2}mv^2 + V\left(\frac{ma}{c}\right) = 0$, откуда $v = a\sqrt{\frac{m}{c}}$. Этот результат следует также и из (2).

[10] Р. В. Поль, Механика, акустика и учение о теплоте, М., 1957, стр. 129.

[11] W. Schallreuter, Einführung in die Physik, I, VEB Wilhelm Knapp Verlag, Halle, 1958, стр. 138, 139.

[12] С. Э. Фриш и А. В. Тиморева, Курс общей физики, т. I, М., 1958, стр. 67, 68.

Таким образом, здесь утверждается, что движение шара (относительно вагона) прекратится, как только он отклонится на расстояние $\frac{mw}{c}$ (п. 2). Однако этого не может быть, так как шар в тот момент обладает отличной от нуля скоростью $a\sqrt{\frac{m}{c}}$ (см. сноску на стр. 66); скорость шара обратится в нуль лишь на расстоянии $\frac{2mv}{c}$, откуда он будет двигаться назад, и т. д. Следовательно, в вышеприведенном рассуждении сделана та же ошибка, что и у Гримзеля.

Иногда неучитывание действия сил упругости в ускоренно движущихся системах отсчета приводит к более скрытым ошибкам. Рассмотрим, например, следующую задачу[13]: «На тележке укреплен горизонтальный стержень, по которому может скользить *без трения* муфта массы

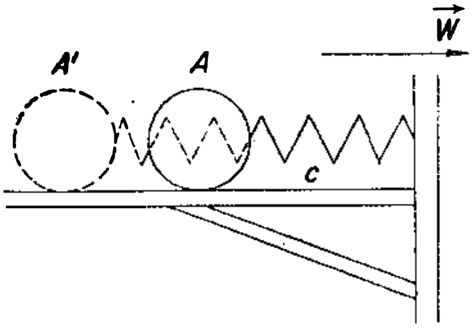

Рис. 5

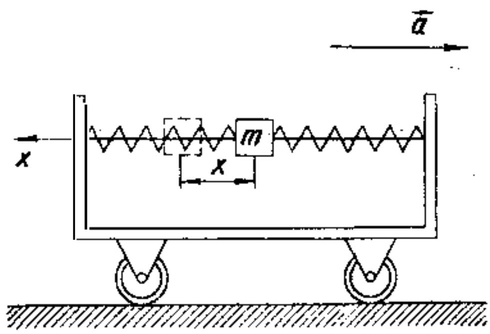

Рис. 6

$m=1$ *кг* (рис. 6). К муфте прикреплены две пружины, общий коэффициент жесткости которых $k=0{,}1$ *кГ* $\cdot$ *см*$^{-1}$. Как будет двигаться груз относительно системы отсчета, связанной с тележкой, в следующих случаях: 1) тележка получает ускорение, очень медленно нарастающее от нуля до значения a; 2) тележка в момент $t=0$ внезапно получает ускорение $a=0{,}98$ *м/сек*^{2}, остающееся затем неизменным. *Трение считать очень малым»* (подчеркнуто мною.— Л. К., ср. п. 2).

В ответе указано, что в случае 1) муфта будет постепенно (по мере роста ускорения) смещаться в направлении, обратном ускорению; максимальное смещение $\xi=\frac{ma}{k}$. В случае 2) муфта начнет совершать колебания по закону $x=\frac{ma}{k}(1-\cos\omega t)$, где x — координата муфты относительно тележки, отсчитываемая от начального положения муфты.

К сожалению, ответ на первый вопрос не соответствует действительности. Пусть, например, закон нарастания ускорения — линейный, $w=bt$, где b — малая величина. Тогда уравнение движения муфты (рис. 6)

$$m\ddot{x}=-kx+mbt.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$, есть

$$x=-\frac{b}{\omega^3}\sin\omega t+\frac{b}{\omega^2}t \quad \left(\omega^2=\frac{k}{m}\right).$$

[13] С. П. Стрелков и др., Сборник задач по общему курсу физики. I, М., 1960, зад. 341, стр. 63.

Отсюда видно, что движение груза есть наложение равномерного движения со скоростью b/ω^2 и гармонических колебаний с частотой $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\approx 10\,\frac{1}{сек}$. В момент времени $t_1=\frac{a}{b}$, когда ускорение тележки становится равным a, смещение груза равно

$$\xi=\frac{ma}{k}-\frac{b}{\omega^3}\sin\omega\frac{a}{b}<\frac{ma}{k}.$$

Дальнейшее движение груза определяется уравнением $m\ddot{x}_1=-kx_1+ma$ и начальными условиями $x_1(0)=\xi$, $\dot{x}_1(0)=\dot{x}(t_1)$; как явствует из п. 2 (см. (1) и (2)), это движение будет гармоническими колебаниями с частотой $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

К аналогичному выводу придем, принимая и другой закон изменения ускорения тележки, напр.,

$$w=a\left(1-e^{-\alpha t}\right)\quad(\alpha>0).$$

В этом случае закон движения муфты при тех же начальных условиях будет:

$$x=\frac{a}{\omega^2}-\frac{a}{\alpha^2+\omega^2}e^{-\alpha t}-\frac{a\,\alpha}{\omega^2(\alpha^2+\omega^2)}(\alpha\cos\omega t+\omega\sin\omega t).$$

Как видно, и здесь на асимптотическое движение в одном направлении

$$x'=\frac{a}{\omega^2}-\frac{ae^{-\alpha t}}{\alpha^2+\omega^2}$$

налагаются гармонические колебания с частотой $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$, ч. и т. д.

Таким образом, авторы данной задачи ошибочно полагают, что колебания груза возникают лишь в случае внезапного сообщения ускорения тележке и что медленный темп нарастания ускорения тележки может обусловить плавный характер движения муфты вдоль стержня.

4. Нет основания думать, что колебательное движение тел в неинерциальных системах отсчета обусловливается исключительно квазиупругими силами линейного характера (напр. действиями пружин). Колебания в этих, как и в

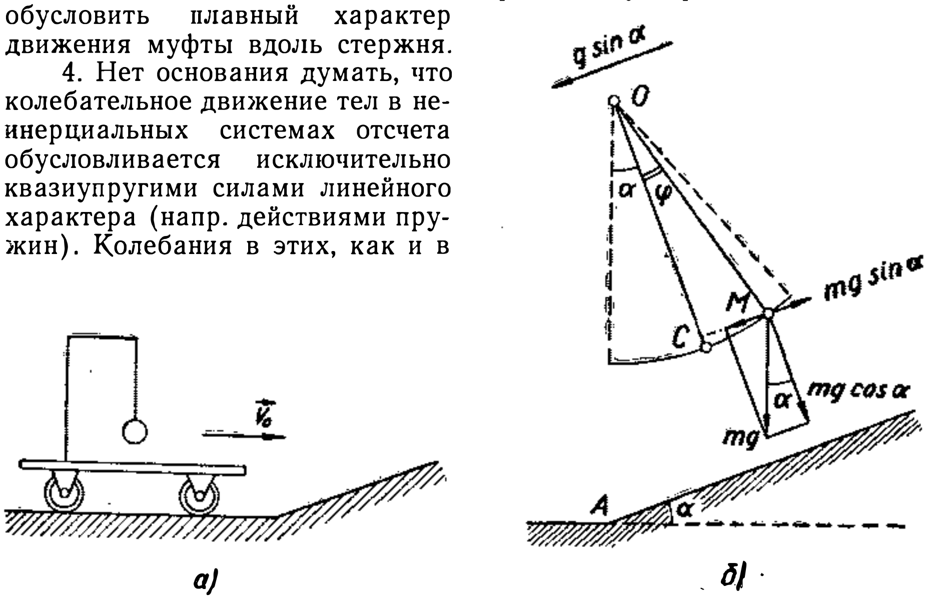

Рис. 7

инерциальных системах, могут возникнуть и при нелинейном законе восстанавливающих сил. Пренебрежение этим обстоятельством тоже часто приводит к грубым ошибкам. Вот два примера.

В вышеупомянутом задачнике В. Г. Зубова и В. П. Шальнова помещена задача (зад. 80): «Маленькая тележка с подвешенным на нити шариком (рис. 7[а]) подъезжает со скоростью v_0 к наклонной плоскости. В какую сторону от вертикали отклонится нить, удерживающая шарик, когда тележка начнет въезжать на наклонную плоскость?»

Ответ очень характерен: «Шарик отклонится вперед и будет висеть перпендикулярно к наклонной плоскости». Это совсем неверно!

Обратим внимание на решение задачи: «При въезде на наклонную плоскость тележка приобретает ускорение a, направленное в сторону, противоположную ее движению. Точка подвеса, двигаясь замедленно, отстанет от шарика. Ускорение шарика станет равным ускорению тележки в тот момент, когда нить, удерживающая шарик, будет направлена по вертикали к наклонной плоскости».

В принципе здесь сделана та же ошибка, которую мы отметили выше, рассматривая примеры в учебниках Гримзеля и С. Э. Фриша. Действительное движение шарика по отношению к тележке будет следующим: когда тележка начнет въезжать на наклонную плоскость, шарик — как обыкновенный математический маятник — начнет совершать колебания вокруг направления перпендикуляра к наклонной плоскости. Амплитуда колебаний будет равна углу наклона плоскости α (рис. 7[б]), период колебаний — при небольшой величине этого угла — $2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}$ (колебания шарика будут постепенно затухать под влиянием трения и сопротивления воздуха; обычно в случае маятников эти диссипативные силы бывают незначительными, и в первом приближении ими можно пренебречь; в условии задачи они вовсе и не упоминаются). Ускорение шарика действительно станет равным ускорению тележки в момент, когда нить будет направлена по перпендикуляру к наклонной плоскости, однако, придя в положение C, шарик не будет «висеть перпендикулярно к наклонной плоскости», ибо в этот момент он обладает скоростью, равной $\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{2gl\cos\alpha}$ (l — длина нити).

Все это явствует из того простого факта, что в системе отсчета, связанной с поднимающейся тележкой, на шарик действует единственная активная сила — составляющая веса $mg\cos\alpha$, перпендикулярная к наклонной плоскости: вторая составляющая веса $mg\sin\alpha$, направленная вдоль наклонной плоскости, уравновешивается силой инерции переносного движения. Уравнение колебаний шарика

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\cos\alpha\cdot\sin\varphi$$

(φ — угол, отсчитываемый от направления OC) отличается лишь множителем $\cos\alpha$ от уравнения движения математического маятника, колеблющегося в поле силы тяжести mg. Поэтому в отношении движения шарика M можно повторить все, что имеет место для обыкновенного математического маятника, заменяя лишь g на $g\cos\alpha$ и учитывая, что начальные условия суть

$$\varphi(0) = -\alpha,\ \dot{\varphi}(0) = 0.$$

Ясно, что правильный ответ на вопрос задачи может быть дан и при помощи понятий элементарной механики, т. е. не прибегая к силам инерции; достаточно лишь заметить, что составляющая веса шарика $mg\sin\alpha$, если бы она действовала лишь одна, обеспечивала бы неподвижность шарика относительно тележки. Остальные две силы — составляющая веса $mg\cos\alpha$ и натяжение нити — превращают шарик в математический маятник.

Перейдем ко второму примеру.

При изложении динамики часто пользуются демонстрацией отвеса на тележке (рис. 8а). При этом, вопреки непосредственно наблюдаемым

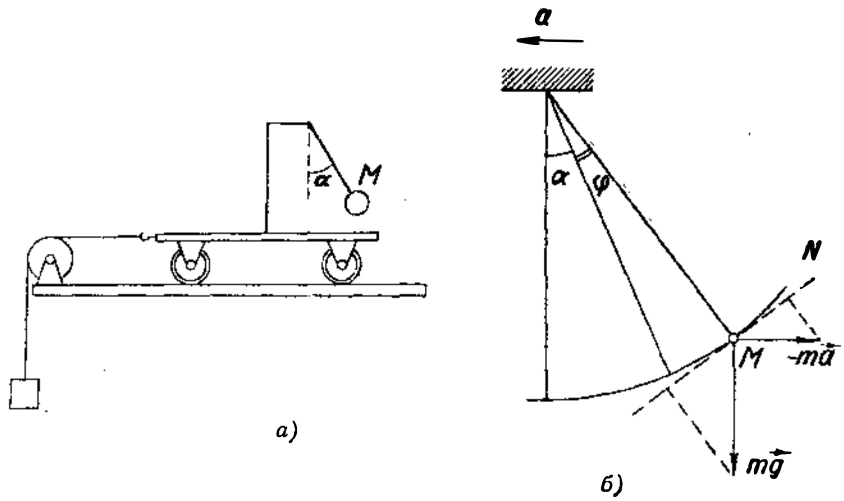

Рис. 8

фактам, утверждают, что при ускорении тележки шарик M постепенно отклоняется в сторону, противоположную движению тележки, и, когда угол отклонения становится равным $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{g}$ (a — ускорение тележки), дальнейшее движение шарика относительно тележки прекращается,— отвес и тележка, как одно целое, движутся равноускоренным движением[14].

В действительности дело обстоит совсем не так. В начальной фазе движения — даже если учитывать действие диссипативных сил — шарик будет совершать колебания вокруг прямой, наклоненной под углом $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{g}$ к вертикали, отклоняясь то в одну, то в другую сторону от нее. Если рассеяние энергии шарика происходит медленно — в случае отвеса это почти всегда имеет место, — то в первом приближении колебания шарика можно считать незатухающими. Амплитуда этих колебаний равна углу α, а период их определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \ldots\right],$$

где l — длина нити отвеса. При малых α, т. е. малых a,

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

[14] Лекционные демонстрации по физике, под ред. А. Б. Млодзеевского, Общая механика, М., 1954, стр. 52; М. П. Шаскольская и И. А. Эльцин, Сборник избранных задач по физике, М., 1959, зад. 38, стр. 14.

Правильность этих утверждений вытекает из того, что уравнение движения шарика, как легко установить[15], есть

$$\dot{\varphi} = -\frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l}\sin\varphi.$$

Здесь φ — угол отклонения шарика от положения равновесия, характеризуемого условием $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g}$. Написанное уравнение отличается от уравнения колебаний математического маятника в поле силы тяжести только тем, что вместо g в нем появляется $\sqrt{g^2 + a^2}$.

Таким образом, и в данном случае нелинейной восстанавливающей силы относительное движение шарика носит колебательный характер. Шарик из начального положения $\varphi = -\alpha$ в течение промежутка времени $T/4$ приходит в положение относительного равновесия $\varphi = 0$, однако в тот момент он обладает скоростью $2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{l\sqrt{g^2 + a^2}}$, вследствие чего отклоняется в противоположную сторону на угол $\varphi = \alpha$, и т. д.

5. Отметим еще, что неучитывание действия упругих сил может привести к ошибочным утверждениям также при изучении явлений движения в ***инерциальных*** системах отсчета. Рассмотрим следующую задачу:[16] «Динамометр (рис. 9) прикреплен к двум грузам с массами $M = 10$ *кг* и $m = 10$ *г*. К грузам приложены силы $F = 2$ *кГ* и $f = 1$ *кГ*. Что будет происходить с грузами и что покажет динамометр, если: 1) сила F приложена к большему грузу, а сила f — к меньшему; 2) сила F приложена к малому грузу, а f — к большему; 3) что показал бы динамометр, если бы массы грузов были одинаковы и равны $M = m = 5$ *кг*?»

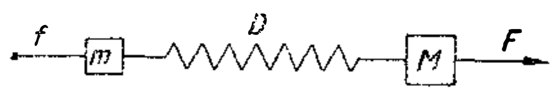

Рис. 9

В ответе указано, что «Динамометр будет показывать силу:

$$1)\ f_n \approx f = 1 kГ;\quad 2)\ f_n \approx F = 2 kГ \text{ и } 3)\ f_n = \frac{F + f}{2} = 1{,}5\ kГ.$$

Р е ш е н и е: Во всех трех случаях система будет двигаться с некоторым ускорением a в сторону действия большей силы и динамометр будет показывать силу связи f_n, действующую между грузами. Для отыскания величины f_n необходимо написать уравнение второго закона Ньютона для каждого груза в отдельности. Для первого случая (рис. 10).

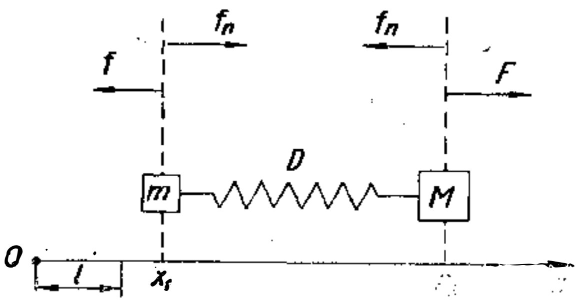

Рис. 10

$$F - f_n = Ma,\quad f_n - f = ma.$$

Отсюда

$$a = \frac{F - f}{M + m}$$

и

$$f_n = F - \frac{M}{M + m}(F - f).$$

[15] Достаточно воспользоваться уравнением $ml\ddot{\varphi} = F_t$, где F_t — сумма проекций веса $m\vec{g}$ и силы инерции — $m\vec{a}$ на направление касательной MN (рис. 8[б]). Ср. также Е. Л. Н и к о л а й, Теоретическая механика, т. II, М.—Л., 1952, стр. 116, 117.

[16] В. Г. З у б о в и В. П. Ш а л ь н о в, Задачи по физике, М., 1959, зад. 70, стр. 25.

В силу того, что $m \ll M \ldots$, можно считать, что $f_п \approx f$. Аналогично... можно рассмотреть и остальные случаи».

Как видно, в решении вовсе не учитывается то, что грузы соединены между собой пружиной, действие которой *не постоянно, а пропорционально ее удлинению.* Авторы задачи полагают, что вся система движется, как одно твердое тело, с ускорением $a = \frac{F-f}{M+m}$. Фактически же с таким ускорением движется лишь центр масс системы, а грузы под действием пружины совершают колебания относительно центра масс с частотой $\omega = \sqrt{\frac{c}{\mu}}$, где c — жесткость пружины, $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ — приведенная масса системы. Точнее, закон движения грузов — как нетрудно установить, например, решая систему лагранжевых уравнений движения — следующий:

$$x_1 = \frac{1}{2}\frac{F-f}{M+m}t^2 - \frac{1}{c}\frac{M}{(M+m)^2}(mF+Mf)(1-\cos\omega t),$$

$$x_2 = l + \frac{1}{2}\frac{F-f}{M+m}t^2 + \frac{1}{c}\frac{m}{(M+m)^2}(mF+Mf)(1-\cos\omega t),$$

где x_1, x_2 — координаты грузов, отсчитываемые от начального положения груза m, l — натуральная длина пружины. Отсюда вытекает, что натяжение пружины

$$f_п = c\,[(x_2 - x_1) - l]$$

не является постоянным, а меняется по закону.

$$f_п = \frac{mF+Mf}{M+m}(1-\cos\omega t)$$

между границами

$$0 \leqslant f_п \leqslant 2\frac{mF+Mf}{M+m} = f_{п\,max}.$$

В ответе же для натяжения пружины указывается значение

$$\frac{mF+Mf}{M+m} = \frac{1}{2}f_{п\,max}$$

— среднее значение $f_п$ за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\overline{f_п} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f_п dt$.

Конечно, в реальных условиях колебательный характер движения грузов, а, следовательно, и показаний динамометра, со временем исчезает, но, по условию задачи, трения и сопротивления движению учитывать не надо. Во избежание недоразумений и ошибок обязательно в данном случае указать, что движение грузов рассматривается после окончания процесса затухания колебаний (см. п. 2)[17].

6. Подводя итог выше изложенному, можно сказать, что ошибки, делаемые при рассмотрении движения материальных тел в ускоренно движущихся системах отсчета, чаще всего возникают по той причине, что — не учитывая действия восстанавливающих сил — обычно обра-

---

[17] В третьем вопросе указание, что общая масса грузов равна 5 *кг*, есть лишнее данное, ибо $\overline{f_п} = \frac{1}{2}(F+f)$ при любых равных M и m.

щают внимание только на изменение положения равновесия тел, вызванное ускорением системы отсчета, и полагают, что тела, двигаясь в направлении этого нового положения равновесия, достигают его (с нулевой скоростью) в самом начале движения системы.

В действительности же восстанавливающие силы, как и в инерциальных системах, обусловливают колебания тел вокруг этого положения равновесия; амплитуда колебаний зависит от начальных условий и может быть весьма большой. Диссипативные силы, разумеется, делают эти колебания затухающими, однако апериодический случай в подавляющем большинстве задач не встречается (маятники, пружины, ножовки и т. п.). Поэтому при описании подобных явлений, составлении и решении задач на эту тему можно избегнуть неверных утверждений и ошибок только в предположении, что все механические процессы в ускоренных системах рассматриваются *после окончания затухания колебаний,* когда тела действительно занимают новые положения равновесия[18]. Если же — как это бывает чаще всего — силами трения и сопротивлениями пренебречь, то колебания тел, возбуждаемые восстанавливающими силами, — незатухающие, и неучитывание этого обстоятельства приводит к недопустимым ошибкам.

ВГПИ Кафедра теоретической физики. Представлено в марте 1962 г.

APIE KAI KURIAS KLAIDAS, DAŽNAI PASITAIKANČIAS, NAGRINĖJANT GREITĖJANČIOSE ATSKAITYMO SISTEMOSE VYKSTANČIUS MECHANINIUS REIŠKINIUS

L. KULVIECAS

Reziumė

Nagrinėjant greitėjančiose atskaitymo sistemose vykstantį judėjimą materialių kūnų, kurie yra pritvirtinti prie spyruoklių, viename taške pakabintų siūlų ir pan., paprastai atsižvelgiama tik į kūnų pusiausvyros padėties pakitimą ir tvirtinama, kad pačioje greitėjimo pradžioje kūnai užima šią pakitusią pusiausvyros padėtį. Elastinių arba apskritai pozicinių jėgų, kurias sąlygoja spyruoklių, siūlų ir kitų ryšių veikimas, visiškai nepagrįstai nepaisoma, ir tuo daroma rimta klaida, nes pastarosios jėgos, pagreitindamos kūnus, nesustabdo jų naujojoje pusiausvyros padėtyje, bet verčia svyruoti aplink šią pusiausvyros padėtį; svyravimų amplitudė, priklausomai nuo pradinių sąlygų, gali būti gana didelė.

Dėl šios priežasties kai kurie tvirtinimai, liečiantys greitėjančiose sistemose vykstančius reiškinius, ir daugelio atitinkamų uždavinių sprendimai yra neteisingi. Straipsnyje tai parodyta, išnagrinėjant konkrečias fizikos vadovėlių vietas bei kai kuriuos plačiai paplitusius uždavinius.

---

[18] В случае вязкого трения; при сухом трении тела́ останавливаются в так называемой полосе застоя; см., напр., И. М. Бабаков, Теория колебаний, М., 1958, стр. 531, 532.