LTSR AUKŠTŲJŲ MOKYKLŲ MOKSLO DARBAI
FILOSOFIJA, II, 2 sąs., 1962

К ВОПРОСУ О МЕТОДИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ИМПЛИКАЦИИ

В. СЕЗЕМАНАС

I

Диалектический материализм признает задачей научного познания адекватное, соответствующее объективной действительности, отображение предмета в сознании человека. В этом определении имеется в виду не только то, что познание устанавливает истину, но также и то, что оно признает установленное суждение о предмете *достоверным,* т. е. соответствующим действительному положению вещей. В этом заключается существенная черта научного мышления — его *рефлексивность:* оно направлено не только на свой предмет, но и на самое себя, и только благодаря этому оно способно обеспечить не только истинность, но и методическую достоверность познания. Другими словами, всякое научное познание руководствуется принципом, требующим, чтобы каждое утверждение имело свое достаточное основание, т. е. чтобы оно вытекало как необходимое следствие из имеющихся данных, истинность которых уже проверена тем или иным способом. А логическая связь основания и следствия и есть та связь, в которой отражаются в мышлении закономерные связи явлений самой действительности, так как на связи основания и следствия и зиждется всякое доказательство. Она, как строгая, или формальная, импликация, лежит в основе всякой научной дедуктивной теории[1]. Казалось бы естественным, что логика, как учение о

[1] Во избежание недоразумений заметим, что термин «формальная импликация» мы употребляем повсюду в самом широком смысле, как контрарную противоположность материальной импликации. Иначе говоря, мы разумеем под этим термином логическую связь основания и следствия (в условном суждении или в умозаключениях), в силу которой, признав истинность основания, мы должны признать также истинность следствия. Это — связь однозначная и необходимая, основанная на законах логики в отличие от той фактической связи, которую устанавливает материальная импликация. Вместе с тем это связь, учитывающая содержание связываемых предложений, и постольку связь осмысленная «reasonable» (по терминологии Рейхенбаха). Правда, указанные особенности формальной импликации не дают еще однозначной и исчерпывающей характеристики этой связи, скорее лишь очерчивают ее проблематику в целом. Но в той или другой взаимосвязи эти признаки входят во все те различные интерпретации и объяснения, которые пытаются точно определить формальную импликацию (логическую связь основания и следствия) и ее отношение к материальной импликации.

структуре мышления, обеспечивающего достоверность научного познания, должна была бы прежде всего заняться анализом именно этой основной логической связи мыслей, вне которой невозможно никакое подлинно научное знание. Однако современная символическая логика — как это ни парадоксально — в основу своего построения кладет не формальную, а так называемую «материальную» импликацию, т. е. наименее точную и определенную связь мыслей, можно даже сказать — столь неопределенную, что в ней, кажется, совершенно отсутствует тот момент однозначной определенности, который обусловливает познавательную ценность логической связи мыслей в формальной импликации. Действительно, она эквивалентна (равнозначна) тому случаю слабой дизъюнкции, в котором первый ее член отрицательный, второй же положительный $(\bar{p} \vee q) \sim$ $\sim (p \rightarrow q)$. Между тем именно этот методический путь исследования структуры мышления и его познавательного значения обеспечил прогресс логики и возможность тех ее обобщений, которые соответствуют современному уровню научного знания и удостоверяют, что логика действительно составляет общую основу методологии всякого научного знания.

При наличии двух суждений материальная импликация, так же как и слабая дизъюнкция, истинна в трех случаях, и только один случай отпадает как ложный и тем самым отличает материальную импликацию от полной неопределенности, когда при сопоставлении двух высказываний все четыре значения (*и-и*, *и-л*, *л-и*, *л-л*) одинаково возможны. Если слабая дизъюнкция охватывает больше чем 2 элементарных высказывания (3, 4, . . ., n), то число возможных значений истинности или ложности возрастает до 2^n случаев и соответственно увеличивается и число истинных значений сложного дизъюнктивного высказывания. Но принципиально положение не меняется. Для нас сейчас важно лишь отметить, что даже при ограничении двумя высказываниями материальная импликация, эквивалентная частному случаю слабой дизъюнкции, не дает вполне однозначного «вывода», не выходит за пределы только возможного и этим существенно отличается от формальной, или строгой, импликации в обычном понимании, которая всегда однозначна независимо от того, берется ли она в категорическом или гипотетическом смысле.

Кроме того, те случаи материальной импликации, которые имеют значение истинности, устанавливают лишь фактическое совпадение истинности двух высказываний, и в этом смысле их связь только внешне случайна по сравнению с необходимой связью, присущей формальной импликации, а постольку и всякой дедукции. Материальную и формальную импликацию разделяет в этом отношении целая пропасть, которую невозможно заполнить одними средствами материальной импликации.

Рассмотрение этих толкований и различных видов формальной импликации, как, например, тавтологии Рассела и Витгенштейна, «точной» (strict) импликации Льюиса, строгой импликации Аккермана, аналитичности логической детерминации и др. не входит в задачу настоящей статьи.

Поэтому естественно возникает вопрос: чем руководствуется современная символическая логика, когда она кладет в основу своего систематического построения такие связи, в которых отсутствует момент необходимости и строгой однозначности? И, далее, продиктован ли такой методический путь самой логической проблематикой или же он обусловлен той позитивистской позицией, которой придерживается большинство основоположников современной символической логики?

II

Что символическая логика в своих основах не зависит от гносеологической позиции позитивизма в разнообразных его современных вариантах и что позитивистское ее понимание является в лучшем случае одной из возможных ее интерпретаций, но отнюдь не единственно возможной, признают теперь и многие западные специалисты[2]. Об этом свидетельствует и тот факт, что символическая логика и в Советском Союзе успешно разрабатывается и применяется к различным отраслям науки и техники в самой тесной связи с положениями диалектического материализма, не говоря уже о том, что только диалектика способна объяснить и правильно осветить возможность построения аксиоматической логики и ее применения к развитию научного знания. Отметим лишь вкратце те черты современной символической логики, которые связаны с ее внутренней проблематикой, и укажем, в какой мере ее исходные положения приемлемы для диалектического материализма.

1. По вопросу об источниках познания большинство современных представителей символической логики придерживаются эмпирической точки зрения. Основой всякого познания, как чувственного, так и понятийного, является опыт. Взятое в таком общем недифференцированном значении, это положение вполне согласуется с позицией диалектического материализма. Коренное расхождение с точкой зрения логического позитивизма возникает по вопросу о том, как понимать опыт: в субъективном смысле личных переживаний отдельного познающего субъекта или в объективном смысле как отражение реального мира в сознании человека, обусловленное общественной практикой всего человечества. Преимущество понимания опыта в объективном и общественном смысле проявляется в том, что оно устраняет те трудности и неувязки, с которыми логический позитивизм неизбежно сталкивается и в логическом плане при решении проблемы общего (общих объективных закономерностей).

2. Поскольку всякое познание начинается с познания конкретных фактов, а факты фиксируются и выражаются в элементарных суждениях восприятия (так называемых «атомарных» предложениях), то вполне

[2] Позитивистская интерпретация символической логики возможна в том смысле, что основные ее положения, как таковые, могут быть согласованы с позитивистской установкой. Тем не менее эта интерпретация неприемлема для диалектического материализма, потому что ее гносеологические предпосылки порочны.

естественно и последовательно признать именно суждение (а не понятие) первичной формой, или логической единицей, познания действительности. Эти элементарные суждения как индивидуальные единства обладают двумя логически существенными особенностями: а) в зависимости от того, соответствуют ли они действительному положению вещей или нет, они имеют два значения: быть истинными или ложными; б) они вступают между собой в разнообразные отношения, которые зависят от определенных логических связей, и образуют таким образом сложные мысленные единства (так называемые «молекулярные» предложения), которые в свою очередь имеют значение истинности или ложности. Изучение логических связей, определяющих структуру «молекулярных» предложений, и их взаимоотношений, позволяющих переходить от одних связей к другим, а также выяснение их познавательного значения и составляет предмет первого элементарного отдела символической логики — так называемого исчисления высказываний. Во всей этой концепции, изложенной Расселом в «Principia Mathematica», возражение вызывает лишь тот метафизический смысл, который он придает термину «атомарные» предложения, понимая под ними абсолютно простые суждения, совершенно независимые друг от друга. Такой логический атомизм не только не оправдывается строем научного знания и его историческим развитием, но прямо противоречит ему[3]. Простота «атомарных» предложений может иметь лишь относительное значение и зависит в каждом отдельном случае от данной познавательной ситуации и уровня познания. Это — те исходные, внутренне еще нерасчлененные высказывания об индивидуальных предметах, из которых благодаря логическим связям получаются высшие, более сложные формы предложений («молекулярных»).

Другое принципиальное расхождение диалектического материализма с логическим позитивизмом касается вопроса о критерии истинности атомарных предложений. Решение этого вопроса неразрывно связано с субъективным или объективным пониманием опыта. Но поскольку логика, как исчисление высказываний, сама не исследует этого вопроса, а принимает различие между истинностью и ложностью и их контрадикторную противоположность, как нечто данное, то символическая логика, по крайней мере в своей основе (т. е. в пределах исчисления высказываний), строится независимо от того или иного решения гносеологического вопроса о понимании истины. Во всяком случае вопрос о критерии истинности простых высказываний подлежит рассмотрению не в самом исчислении высказываний, а лишь в семантической части металогики, изучающей структуру и значение употребляемых в нем формул.

Но исчисление высказываний составляет лишь фундамент формальной логики (в ее символическом выражении). Дальнейшая дифференциация логической структуры мышления требует раскрытия внутреннего строя суждений, расчленения их на основные логические элементы —

[3] Ср. *М. Корнфорт*, Наука против идеализма, М., 1948, стр. 174 и т. д.

субъект и предикат — и выявление той функциональной связи, которая их объединяет. Носителем этой связи является предикат, который определяет собой совокупность всех возможных удовлетворяющих ей значений субъекта (значений истинности). Так совершается переход от элементарных структур мышления к высшим, дифференцированным, от исчисления высказываний к исчислению предикатов — одноместных, многоместных и предикатов высших ступеней (предикатов предикатов).

Поскольку сложные структуры мышления зависят от сочетания элементарных, то и их истинность или ложность должна прежде всего обусловливаться истинностью или ложностью этих последних. Вот почему символическая логика в ее классической форме (Гильберт, Фреге, Рассел) имеет преимущественно *экстенсиональный* характер: сложные формы рассматриваются как производные от элементарных форм и их сочетаний. А постольку и отношение между единичным и общим определяется прежде всего с его количественной или объемной стороны: общие понятия и суждения характеризуются через кванторы как множества, или совокупности, тех предметов или высказываний, которые удовлетворяют данной предикативной функции, причем число значений истинности n может быть конечным или бесконечным —

$$\forall x\ f(x) \sim f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot f(x_3), \ldots, f(x_{n-1}) \cdot f(x_n)$$

или

$$\exists x\ f(x) \sim f(x_1) \vee f(x_2) \vee f(x_3) \vee \ldots \vee f(x_n).$$

Вопрос о том, способно ли экстенсиональное толкование исчерпывающе охарактеризовать все структурные особенности мышления и его модальные различия (возможность, необходимость, невозможность), не получил еще окончательного ответа. Мнения ведущих логиков в этом отношении расходятся. Попытки построить логику на неэкстенсиональной основе до сих пор не могли доказать, что экстенсиональное толкование можно полностью заменить другой, независимой от экстенсиональности интерпретацией. Это, конечно, не значит, что проблема модальности исключается из экстенсионально построенной системы логики, обычно ее относят к металогике. Во всяком случае не подлежит сомнению, что своей методологической плодотворностью символическая логика обязана прежде всего своему экстенсиональному (объемному) характеру. С экстенсиональностью связано и самое главное достижение современной формальной логики — ее аксиоматизация и формализация, т. е. такое построение логики, которое при помощи системы символов фиксирует самые общие структурные закономерности мышления (аксиомы и определения входящих в них понятий), имеющие силу для любого конкретного содержания знания, а также правила вывода, позволяющие из установленных начал вывести все положения, принадлежащие к определяемой аксиомами логической системе. Тогда формальная логика и превращается наподобие математики в исчисление (calcul), в котором одни формулы на основании определенных правил преобразуются в другие и в конечном итоге выводятся из основных (аксиом).

Понятие материальной импликации является тем методическим средством, которое дает возможность включить формальную (строгую) импликацию в исчисление высказываний, а потом и в исчисление предикатов, построенное на экстенсиональных началах. Задача настоящей статьи заключается прежде всего в том, чтобы показать, что толкование импликации, как частного случая слабой дизъюнкции, основывается на особом методическом приеме, которым в широких размерах пользуется математика. Это не значит, что методический прием, о котором идет речь, специфичен для математики и что экстенсиональная логика позаимствовала его у математики. По своему существу это чисто логический прием, который находит применение и в других научных областях. В математике его познавательное значение выступает лишь с наибольшей непосредственной убедительностью[4].

III

Рассмотрим сначала познавательное значение слабой дизъюнкции в ее общей форме применительно к простейшему случаю, когда она связывает знаком дизъюнкции два высказывания (p и q). Из четырех возможных сочетаний истинности или ложности членов дизъюнкции она устанавливает возможность истинности трех комбинаций: $p \vee q, \bar{p} \vee q$ и $p \vee \bar{q}$ и исключает как ложный только один случай, когда оба предложения ложны: $\bar{p} \vee \bar{q}$. Стало быть, из $p \vee q$ необходимо следует $\overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}$, а это показывает, что в слабой дизъюнкции уже заключается момент формальной импликации. Правда, вывод, который она дает, чисто отрицательный, он не устраняет той неопределенности, которая кроется в возможности трех положительных случаев. Это в равной мере относится и к той исходной форме слабой дизъюнкции, в которой оба члена p и q отрицательные и которая выражает их *несовместимость*: при $\bar{p} \vee \bar{q}$ также возможны три истинных значения, а именно: $\bar{p} \vee q$, $p \vee \bar{q}$ и $\bar{p} \vee \bar{q}$ и одно ложное — $p \vee q$. Но важно отметить, что начала формально логической связи (следования) сопряжены именно с *отрицанием*. Детерминирующая (определительная) функция отрицания проявляется еще сильнее в тех случаях слабой дизъюнкции, где за исходную берется ее форма, в которой первый ее член имеет отрицательное значение, а второй — положительное или отрицательное значение. Правда, и здесь, как и в случае положительности обоих членов дизъюнкции, истинными могут быть три комбинации, а ложной — только одна. Но, с другой стороны, отличие сочетаний $\bar{p} \vee q$ и $\bar{p} \vee \bar{q}$ от сочетания $p \vee q$ очень существенно, а именно: в случае отрицательности второго члена получается, как одна из возможно истин-

[4] Если мы употребляем термин «методический прием», то отнюдь не в субъективном смысле, будто прием вносится в познание предмета искусственно, как бы извне, по усмотрению исследователя. Всякий научный метод, как целесообразный подход к предмету, имеет объективное основание в природе самого предмета и постольку уже предполагает известную степень познанности предмета, указывающей, какими путями или приемами достигается дальнейшее углубление его познания.

ных комбинаций, $(\bar{p} \vee \bar{q}) \sim (p \rightarrow \bar{q})$ или $p \cdot \bar{q}$, т. е. такая формула, под которую подходит и отрицательная формальная импликация. Если же отрицателен только первый член дизъюнкции, то среди возможно истинных комбинаций находится и та, которая пригодна для выражения положительной формальной импликации $p \rightarrow q$, поскольку эта комбинация допускает совместность (совпадение) истинности p и q, т. е. $(\bar{p} \vee q) \sim (p \rightarrow q)$. В этом и состоит та особенность слабой дизъюнкции с первым отрицательным членом, благодаря которой она была выделена, как особый вид импликации, отличный от формальной: она дает такую обобщенную форму связи p и q, в которую укладываются не только отрицательные, но и положительные выводы формальной импликации. С этим связано еще другое существенное отличие материальной импликации от слабой дизъюнкции с двумя положительными членами, которое находится в соответствии с общим строем формальной импликации: ее исходная форма имеет отрицательный антецедент, и она не коммутативна.

Если сопоставить материальную импликацию с другими возможными связями двух предложений (со строгой дизъюнкцией, эквивалентностью и конъюнкцией), то различие идет по двум линиям — *по степени многозначности* истинных и ложных случаев и *по силе или степени связанности* предложений p и q. Строгая дизъюнкция менее многозначна, чем слабая дизъюнкция (и материальная импликация), допуская лишь два возможных истинных случая $\bar{p} \cdot q$ и $p \cdot \bar{q}$ и исключая два остальных — $p \cdot q$ и $\bar{p} \cdot \bar{q}$. Но вместе с тем она теснее связывает оба возможных случая, поскольку истинность $p \cdot \bar{q}$ обусловливает ложность $\bar{p} \cdot q$ и, наоборот, из истинности $\bar{p} \cdot q$ следует ложность $p \cdot \bar{q}$. Строгая дизъюнкция представляет собой частный случай слабой дизъюнкции, который получается, когда к предложению $p \vee q$ прибавляется дополнительное условие $\overline{p \cdot q}$. С другой стороны, если исходить из исключающей дизъюнкции, то слабая дизъюнкция является ее обобщением или формализацией. Поскольку исключающая дизъюнкция сильнее слабой, истинность первой включает в себя истинность второй $(p \dot{\vee} q) \rightarrow (p \vee q)$, но не наоборот, из $p \vee q$ не следует $p \dot{\vee} q$.

По сравнению с эквивалентностью слабая дизъюнкция более многозначна, ибо таблица эквивалентности дает два случая истинности — $p \cdot q$ и $\bar{p} \cdot \bar{q}$ и два случая ложности — $p \cdot \bar{q}$ и $\bar{p} \cdot q$. Она представляет собой контрадикторную противоположность исключающей дизъюнкции. Из отрицания эквивалентности $\overline{p \sim q}$ получается утверждение исключающей дизъюнкции $(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)$. По силе связанности эквивалентность превосходит материальную импликацию и потому, если $p \sim q$ истинно, то истинным будет и $(\bar{p} \vee q) \sim (p \rightarrow q)$.

Наконец, если мы обратимся к конъюнкции $p \cdot q$, то это единственная связь, которая в смысле значения истинности строго однозначна. В этом отношении она является крайней противоположностью слабой дизъюнкции, которая однозначна только в значении ложности. Конъюнкция сильнее связывает, чем материальная импликация, так что из $p \cdot q$ следует $(p \rightarrow q)$. То же самое имеет силу и по отношению к отрицательной конъюнкции $\bar{p} \cdot \bar{q}$. Если истинно $\bar{p} \cdot \bar{q}$, то истинно и $\bar{p} \rightarrow \bar{q}$.

Если расположить все указанные основные связи двух высказываний p и q по степени многозначности их истинности, переходя от большей многозначности к меньшей, мы получим следующую схему.

I. Слабая дизъюнкция

а) исходная форма *симметрична*:
$p \vee q$ и $\bar{p} \vee \bar{q}$;
б) исходная форма *асимметрична* (антецедент отрицательный, т. е. материальная импликация):
$(\bar{p} \vee q) \sim (p \rightarrow q)$;
$(p \vee \bar{q}) \sim (\bar{p} \rightarrow \bar{q})$.

} три истинных значения и одно ложное

II. Строгая дизъюнкция

все формы *симметричны*:
$(p \dot{\vee} q) \sim (q \dot{\vee} p)$;
$(p \dot{\vee} q) \sim [(p \cdot \bar{q}) \vee (\bar{p} \cdot q)]$.

III. Эквивалентность

все формы *симметричны*:
$p \sim q = q \sim p$;
$\bar{p} \sim \bar{q}$;
$p \sim q \equiv (p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow p)$;
$\overline{p \sim q} = p \dot{\vee} q$.

} два истинных значения и два ложных

IV. Конъюнкция

а) *симметричны* одно истинное значение и одно ложное:
$(p \cdot q) \sim (q \cdot p)$;
$(\bar{p} \cdot \bar{q}) \sim (\bar{q} \cdot \bar{p})$.
б) *асимметричны* два ложных значения:
$\overline{p \cdot \bar{q}}$;
$\overline{\bar{p} \cdot q}$.

} одно истинное значение (однозначно), три ложных

Расположение основных связей между двумя высказываниями по признаку убывающей многозначности или, что то же самое, по постепенному переходу от многозначности к однозначности показывает, что только в конъюнкции (как положительной, так и отрицательной) достигается та однозначность, которая является одним из существенных признаков формальной импликации. Пока мы лишь отмечаем это обстоятельство, значение его выясним в дальнейшем ходе нашего анализа. В случае увеличения числа связываемых высказываний данная схема лишь усложняется, т. е. растет число возможных значений истинности и ложности, но по существу схема не меняется.

Если же расположить указанные сочетания двух высказываний по силе их логической связанности, то распорядок получится иной: слабая дизъюнкция, а постольку и материальная импликация, слабее положительной и отрицательной конъюнкции, а эти последние слабее исключающей дизъюнкции и эквивалентности. Действительно, исключающая дизъюнкция получается из слабой дизъюнкции путем дополнительного отрицательного условия $\overline{p \cdot q}$, благодаря чему из $p \cdot \bar{q}$ следует однозначно $\overline{\bar{p} \cdot q}$, а из $\bar{p} \cdot q$ следует $\overline{p \cdot \bar{q}}$ и наоборот. Аналогично и в эквивалентности устанавливается дополнительная связь между положительной и отрицательной конъюнкцией, так что при истинности $p \cdot q$ истинно и $\bar{p} \cdot \bar{q}$ и наоборот. Правда, поскольку исчисление высказываний в своей исходной позиции имеет в виду только *фактическую* истинность «атомарных» предложений p и q, она берет как несовместимость $p \cdot \bar{q}$ с $\bar{p} \cdot q$ (их взаимное исключение) в строгой дизъюнкции, так и положительную связь между $p \cdot q$ и $\bar{p} \cdot \bar{q}$ в эквивалентности, как простой факт несовпадения или совпадения двух значений «молекулярного» (сложного) предложения, отвлекаясь от присущей этим связям необходимости. Они (эти связи) рассматриваются как частные случаи слабой дизъюнкции, которые используются постольку, поскольку они позволяют в логических формулах заменить p через q и $\bar{p}$ через $\bar{q}$ (при $p \sim q$), а $p \cdot \bar{q}$ через $\overline{\bar{p} \cdot q}$ и наоборот (при исключающей дизъюнкции). Правда, общее познавательное значение этих более строгих связей, обладающих характером необходимости (т. е. исключающей дизъюнкции и эквивалентности), вполне раскрывается лишь при переходе от исчисления высказываний к исчислению предикатов (узкому и расширенному). Однако то обстоятельство, что такие более тесные связи получаются из слабой дизъюнкции путем ее дифференциации, путем введения известных ограничительных условий, ясно свидетельствует о том, что построение логической системы на основе слабой дизъюнкции (т. е. избрав ее исходной точкой) отнюдь не является произвольным и искусственным приемом, а диктуется самой структурой мышления, направленного на познание объективной действительности. Эта исходная точка определяет и сближение материальной импликации с формальной и использование первой, если и не для формализации последней в полном смысле, то по крайней мере для такой ее формализованной записи, которая соответствует внешнему распорядку членов (форме) формальной импликации, поскольку эта форма не обусловлена конкретным содержанием связываемых высказываний.

IV

Рассмотрим те доводы, которыми оправдывается введение понятия материальной импликации в обиход современной логики. Прежде всего указывают на то, что методическое значение этого понятия для теории мышления подтверждается логической практикой, в особенности практикой математических доказательств, где пользование материальной импликацией в форме условного «если—то» никогда не приводило к противоречиям; даже, напротив, как говорит А. Тарский, «логика, опирающаяся на это понятие, оказалась вполне пригодной основой для самых сложных и тонких математических рассуждений»[5]. Но этот довод исходит из научной практики и требует дополнения со стороны теоретического анализа, который должен объяснить, почему понятие материальной импликации обладает такой методической плодотворностью. Не отвечает на этот вопрос и указание Тарского, что употребление термина «импликация» в отличном от обычного значении есть лишь уточнение его смысла, устраняющее влияние психологических факторов (напр., уровня нашего знания о данном предмете и др.), которые часто делают связь «если—то» чрезвычайно многозначной и неустойчивой. Уточнение терминологии служит лишь средством для выявления логического существа импликативной связи.

По вопросу о толковании материальной импликации нет существенных разногласий между ведущими представителями современной символической логики. Мы поэтому остановимся лишь на трактовке проблемы, которую дает С. А. Яновская в своих комментариях к русскому переводу «Основ теоретической логики» Д. Гильберта и В. Аккермана; здесь полнее всего освещается принципиальная сторона вопроса. Лишь попутно мы отметим те или другие частности, на которые обратили внимание другие авторы.

Постановка вопроса и ход его обсуждения у С. А. Яновской таковы: исходной точкой является обычное (традиционное) понимание логической связи основания и следствия, выражаемой связкой «если—то». Она дана в том смысле, что осуществляется во всяком акте практического и теоретического мышления, выводящем из истинности одних суждений истинность других. Отличительная черта этой логической связи: из истинности p необходимо следует истинность q. «Необходимо» значит: невозможно, чтобы p было истинно, а q ложно. Спрашивается: если исходить из слабой дизъюнкции, как основной логической операции, то какие сочетания истинности или ложности предложений p и q будут совместимы с истинностью логического следования q из p и какие несовместимы?

Из определения логической связи основания и следствия вытекает, что признание ее истинности исключает возможность случая, что p истинно и q ложно. Анализ остальных случаев, произведенный как со стороны антецедента p, так и со стороны консеквента q, показывает, что ни один из них не противоречит связи логического следования. При истинности консеквента q антецедент p может быть истинным или ложным, а при ложности антецедента консеквент может быть как истинным, так и ложным. Но ни в том, ни в другом случае не возникает противоречия с истин-

[5] *А. Тарский*, Введение в логику и методологию дедуктивных наук, М., 1948, стр. 60.

ностью логического следования q из p. В этом смысле Г. Рейхенбах и говорит, что таблицы истинности элементарных «адъюнктивных» связей — термином «адъюнктивный» он заменяет дающий повод к недоразумениям термин «материальная импликация» — могут читаться как слева, так и справа (начиная с антецедента и с консеквента) и всегда дают одинаковый вывод: за исключением случая $p \cdot \bar{q}$ все остальные согласуемы с «коннективной» (т. е. логически необходимой) связью, так что при истинности этой последней имеют силу и первые, однако из истинности адъюнктивных связей нельзя заключать об истинности коннективной связи[6]. С этим пониманием материальной импликации вполне согласуются и высказывания Р. Карнапа, который подчеркивает, что материальная импликация не содержит в себе никакого логического отношения между предложениями p и q, т. е. не предполагает их связи по содержанию, а лишь устанавливает известные условия относительно их значений истинности и тем самым служит базой для выражения соответствующих логических связей в пределах логической системы (синтаксиса), построенной на основе слабой дизъюнкции[7]. А это значит, что логическая связь основания и следствия не может быть целиком сведена к материальной импликации или, иначе говоря, не может быть полностью «формализована» с помощью таблицы, определяющей истинность или ложность сложного предложения «если p, то q» через истинность или ложность составляющих его простых предложений p и q. Стало быть, проблема точного определения логической связи основания и следствия лежит *за* пределами исчисления высказываний; не только решение этой проблемы, но и правильная постановка ее требуют перехода логического анализа на высшую ступень в область металогики, исследующей общую структуру и закономерности тех предложений и связей предложений, которые формулирует и описывает исчисление высказываний[8]. В этом смысле и символ $-\!\!\in$, обозначающий формальную (логическую) импликацию, относится к металогике, поскольку он не употребляется лишь как сокращенное обозначение материальной импликации $\bar{p} \vee q$.

Итак, если последовательно придерживаться точного разграничения материальной и формальной импликаций и иметь в виду, что материальная импликация пригодна лишь для символического обозначения формальной импликации, но отнюдь не выражает логического смысла этой последней, то тем самым устраняются те недоумения, которые вызывают так называемые логические парадоксы, связанные с материальной импликацией. Последние выражаются в том, что ложное предложение имплицирует как ложные, так и истинные предложения и что истинное предложение имплицируется любым истинным или ложным предложением. Термин «имплицировать» употреблен здесь только в смысле

---

[6] *H. Reichenbach*, Elements of Symbolic Logic, New Jork, 1956, p. 27—33.

[7] *R. Carnap*, Introduction to Semantics and Formalization of Logic, Harward Univ. Press, 1959, p. 35—36.

[8] Ср. *Д. Гильберт* и *В. Аккерман*, Основы теоретической логики, М., 1947, стр. 245, 247—248.

«адъюнктивной» связи (фактической сопряженности) и не имеет ничего общего с логическим следованием.

Всматриваясь внимательно в намеченные выше схемы, в которых основные связи простых высказываний расположены по убывающей многозначности и по возрастающей логической связанности, можно, как нам кажется, дать более точный и исчерпывающий ответ на поставленные выше вопросы: почему именно слабая дизъюнкция кладется в основу исчисления высказываний, как первой части системы формальной логики, и почему определение материальной импликации, как такой связи, которая не допускает совпадения истинности антецедента с ложностью консеквента, имеет такое важное методическое значение?

Признание слабой дизъюнкции исходной и основной связью исчисления высказываний оправдывается следующими общими соображениями: 1) человеческое познание зиждется на эмпирическом фундаменте, мышление прежде всего имеет дело с индивидуальными фактами, которые ему доставляет чувственное познание, и 2) слабая дизъюнкция из всех первичных связей предложений самая элементарная и «рыхлая» и в познавательном отношении наименее содержательная, поскольку она лишь сопоставляет известные фактические возможности, заложенные в данном положении вещей. Это показывает уже рассмотрение самой простой жизненной ситуации, требующей для осуществления желаемой цели того или иного образа действия. Перед человеком открывается ряд возможностей, он еще не дает себе отчета в том, охватывает ли его умственный кругозор все возможности, исключают ли они друг друга или совместимы и т. д. Но поскольку он находит в данной ситуации более или менее определенные возможности, он все же полагает, что по крайней мере одна из них окажется осуществимой и эффективной, а тем самым исключает случай, что ни одна из этих возможностей не даст желанного результата, т. е. не окажется истинной. Если же из $p \vee q$ следует $\overline{\bar{p} \cdot \bar{q}}$, то отсюда явствует, что уже в слабой дизъюнкции кроется известное ограничительное условие, некоторый момент отрицания, дающий возможность сделать из нее вывод и постольку сообщающий ей минимальную логическую оформленность, минимальную в том смысле, что получаемый из нее вывод — чисто отрицательный, оставляющий открытыми три положительные возможности ($p \vee q$, $p \vee \bar{q}$ и $\bar{p} \vee q$). Но именно эта логическая неопределенность и многозначность делает объем слабой дизъюнкции настолько широким, что она содержит в себе потенциально остальные, более дифференцированные логические связи высказываний. Дифференциация эта происходит сначала внутри самой слабой дизъюнкции и достигается новым актом отрицания, поражающим один из членов основной дизъюнкции. Благодаря этому многозначность дизъюнкции не меняется (три возможных значения истинности), но она теряет свою *первоначальную симметрию*. Эта форма ослабленной дизъюнкции и есть материальная импликация. В ней исключается как ложный тот случай, когда антецедент p истинен, а консеквент q ложен. А это и есть тот случай, который как невозможный устраняется логической связью основания и следствия. Правда, положительной однозначной связи формальной импликации соответствуют в материальной импликации три различные возможности значения истинности (именно: $\bar{p}$ истинно и q истинно, $\bar{p}$ ложно и q истинно и $\bar{p}$ ложно и $\bar{q}$ ложно), из которых только первое совпадает с предложением «из p следует q». Тем не менее и остальные два случая истинности не противоречат коннективной связи p и q. Эта связь в общем не одно-однозначна, а много-однозначна. Данное следствие, как учит нас опыт, может быть связано с разными основаниями, а поэтому присутствие (истинность) следствия может сочетаться и с отсутствием (ложностью) данного основания, и случай $\bar{p} \cdot q$ не противоречит случаю $p \cdot q$. Если истинность q тем или другим способом установлена, то она не меняется в зависимости от того, обусловлена ли она предложением p или каким-либо другим предложением ($\bar{p}$). Также не противоречит коннективной связи между p и q сочетание $\bar{p} \cdot \bar{q}$. В том случае, когда она много-однозначна, при отсутствии *данного* основания может отсутствовать и следствие. Если же коннективная связь имеет характер эквивалентности, то отсутствие основания обусловливает и отсутствие следствия. Таким образом, оказывается, что все возможные истинные значения материальной импликации совместимы с коннективной связью между p и q, не исключают ее, но не больше. Полное совпадение или соответствие между материальной и формальной импликацией ограничивается лишь тем, что обе устраняют сочетание $p \cdot \bar{q}$ как ложное.

Но тут естественно возникает вопрос: является ли указанное совпадение только случайным, фактическим? Или же оно результат известного соглашения, известной конвенции, включающей недопустимость сочетания $p \cdot \bar{q}$ в определение материальной импликации? Или же, наконец, оно обусловлено теми структурными особенностями мышления, которые выявляются и фиксируются в исчислении высказываний? Ведь если слабая дизъюнкция, частную форму которой представляет и материальная импликация, внутренне (логически) не связывает предложения p и q, а лишь устанавливает фактически возможные случаи истинности сочетания p и q, то среди этих случаев может фигурировать и сочетание $p \cdot \bar{q}$. Однако это соображение не учитывает того, что материальная импликация, будучи формой слабой дизъюнкции, есть особая, более дифференцированная ее форма, отличающаяся большей логической определенностью. Более высокая степень определенности достигается здесь двумя структурными изменениями, заключающимися в том, что первый член дизъюнкции становится отрицательным и нарушается симметрия дизъюнкции, благодаря чему фиксируется *порядок следования* членов дизъюнкции; без изменения логического смысла высказывания они уже не могут меняться местами. Так устанавливается *логическое различие между антецедентом и консеквентом.* Отсюда видно, что сходство между материальной импликацией и коннективной связью не ограничивается только фактическим совпадением в них ложности сочетания $p \cdot \bar{q}$ и что было бы неточно изобразить дело так, будто математика пользуется этим случайным совпадением для того, чтобы придать употребляемым ею выводам одних формул из других более простую и обобщенную форму. Связь между двумя видами импликации более глубокая, она укоренена в общности определенных, вышеуказанных особенностей логической структуры обеих связей (между высказываниями). В этом отношении материальная импликация есть *необходимое*, но не достаточное *условие* (основа) формальной импликации. Основу эту необходимо выявить для того, чтобы найти правильный подход к проблеме коннективной связи. Эту предварительную задачу как раз выполняет исчисление высказываний. Оно раскрывает известную структурную однородность обеих форм импликации. Но это не полная изоморфность. Материальная импликация не может целиком отобразить специфические особенности логической связи основания и следствия. Об этом свидетельствует уже то обстоятельство, что коннективная связь в направлении от основания к следствию однозначна, а в материальной импликации ей соответствуют три истинных сочетания p и q. Следовательно, здесь имеется многозначность, т. е. устанавливается только *возможность*, что в этих истинных случаях материальной импликации кроется (явно не выраженная) коннективная связь двух высказываний. Свойственная ей необходимость обусловлена содержанием и не может быть вычитана или выведена из таблицы истинных значений материальной импликации; наоборот, лишь тогда, когда уже имеется мысль о коннективной связи предложений p и q, мы можем, исходя из нее, поставить вопрос, какие случаи таблицы ей соответствуют и получает ли она в них полное или лишь пустое удовлетворение (как, напр., в случае $\bar{p} \cdot q$). Во всяком случае вопрос о сущности коннективной связи возникает во всей своей принципиальности не в исчислении высказываний, а в исчислении предикатов, где в качестве новых дополнительных условий, логической оформленности предложений и их связей выступают так называемые *кванторы*. Только в сочетании с квантором общности символическая формула материальной импликации может служить формализованным представителем (заместителем), присущим логическому следованию необходимости и всеобщности.

V

Но вернемся к анализу вышеприведенных схем, построенных с тем расчетом, чтобы выявить различные ступени логической оформленности и определенности, характеризующие основные связи нерасчлененных высказываний. Мы уже видели, что в первоначальной (положительной) формулировке слабой дизъюнкции содержится отрицание, поскольку исключается сочетание $\overline{p \vee q}$. Из дальнейшего акта отрицания, поражающего один из членов дизъюнкции, получается асимметрическая форма материальной импликации. Еще новый акт отрицания, устраняющий из материальной импликации комбинацию $p \cdot q$, дает строгую (исключающую) дизъюнкцию, в которой отношение между сочетаниями $p \cdot \bar{q}$ и $\bar{p} \cdot q$ из противоположного (контрарного) становится противоречащим (контрадикторным). Наконец, если отрицать строгую дизъюнкцию в целом, то значения истинности приобретают те сочетания p и q, которые характеризуют эквивалентность ($p \cdot q$ и $\bar{p} \cdot \bar{q}$). Однако отрицание исключающей дизъюнкции не исчерпывает вполне логического смысла эквивалентности; оно устанавливает лишь возможность истинности случаев $p \cdot q$ и $\bar{p} \cdot \bar{q}$, но не раскрывает их взаимную обусловленность, т. е. взаимную положительную связь: если $p \cdot q$, то и $\bar{p} \cdot \bar{q}$ и, наоборот, если $\bar{p} \cdot \bar{q}$, то и $p \cdot q$.

Хотя для построения исчисления высказываний вполне достаточно взять за исходные (основные) связи слабую дизъюнкцию и отрицание, обычно к ним присоединяют еще и конъюнкцию в интересах более простой вычислительной трактовки логических выражений[9]. Но мотивом такого выбора основных связей, по нашему мнению, может служить и то особое положение, которое занимает конъюнкция среди других мысленных связей. Конъюнкция реализует те случаи слабой дизъюнкции, когда оба ее члена p и q истинны или когда оба члена одновременно ложны ($\bar{p} \cdot \bar{q}$). Как положительная, так и отрицательная конъюнкция имеет только одно значение истинности и этой однозначностью отличается от всех других простых связей. Правда, по силе связи она уступает разделяющей дизъюнкции и эквивалентности, ибо она утверждает только фактическое совпадение истинности или ложности сопряженных высказываний p и q, не усиливая их связи какими-либо дополнительными условиями, но благодаря однозначности ее значения истинности, она одна выходит за пределы сферы только возможности и фиксирует то, что непосредственно дает опыт, что мы находим в самой объективной действительности. Ее исключительное значение состоит именно в том, что конъюнкция устанавливает эмпирическую основу мышления и определяет его экстенсиональность, т. е. сферу его значимости (объемности) в самой реальности. С точки зрения традиционной логики конъюнкция представляется наиболее слабой связью. Но исчисление высказываний показывает, что это далеко не так. Конъюнкция сильнее связывает, чем слабая дизъюнкция и материальная импликация. А если сопоставить таблицы истинных и ложных значений конъюнкции и слабой дизъюнкции, то обнаруживается, что эти две связи находятся друг с другом в отношении *симметрической противоположности*: конъюнкция однозначна в отношении истинности, а слабая дизъюнкция однозначна в отношении ложности, причем случай ложности последней $\overline{(p \cdot q)}$ есть полное отрицание случая истинности первой ($p \cdot q$). Если эти два противоположных сочетания так связать, что каждое из них обусловливает истинность другого, то получится связь эквивалентности, т. е. самая сильная связь в области формально-логических отношений. Иначе говоря, в сопряженности этих двух сочетаний находит свое выражение принцип двойственности, играющий решающую роль во всех логических исчислениях[10].

Ввиду того, что между различными первичными связями предложений существуют ~~известные—~~ эквивалентности, поскольку одни связи

---

[9] Ср. *Д. Гильберт* и *В. Аккерман*, Основы теоретической логики, стр. 28.

[10] См. там же, стр. 34—35 и 241.

могут быть заменяемы комбинациями других связей, за исходные (основные) связи исчисления высказываний могут быть приняты и другие связи вместо слабой дизъюнкции и отрицания, например, конъюнкция или материальная импликация в сочетании с отрицанием, без которого не может обойтись ни одно построение исчисления высказываний. Выбор тех или других связей в качестве исходных не вносит в построение исчисления высказываний существенных изменений и диктуется главным образом методическими соображениями простоты и удобства системной целесообразности. Мы остановились на анализе того построения исчисления высказываний, которое в качестве основных пользуется знаками ослабленной дизъюнкции и отрицания потому, что при таком способе изложения особенно ярко выступают специфические черты того метода, который математическая логика широко применяет в целях систематического упрощения вычислений путем обобщающей формализации. В рассмотренном нами случае этот метод определяет само построение исчисления высказываний, поскольку он дает возможность использовать более элементарные и слабые мысленные связи для такой формулировки правил исчисления (т. е. для составления логических формул и их преобразования), которая охватывала бы и более сильные содержательные логические связи при отвлечении от их конкретного содержания. И только таким путем осуществляется возможность построить строго дедуктивную (аксиоматическую) систему логики, все положения которой связаны с исходными (аксиомами) необходимой связью основания и следствия.

VI

Однако в нашем анализе тех связей между предложениями, которыми пользуются исчисление высказываний, мы оставили в стороне один существенный момент, требующий разъяснения. Исследуя элементарные связи суждений (как, напр., дизъюнкцию, конъюнкцию, эквивалентность и др.), мы обнаруживаем, что они находятся в определенных отношениях, позволяющих преобразовывать одни связи в другие, им эквивалентные, заключать от истинности или ложности одних к истинности или ложности других и т. п. Словом, само построение исчисления высказываний на каждом шагу убеждает нас в том, что исследуемые связи суждений образуют некоторую систему, основанную на определенных закономерных отношениях между ними. А эти закономерные отношения представляют собою не что иное, как различные видоизменения строгой (формальной) импликации (отношения основания и следствия), иначе говоря, это то, что мы называем *законами логической структуры мышления*. К ним относятся не только так называемые законы мышления традиционной логики (тождества, противоречия и исключенного третьего), но и целый ряд других законов, многие из которых были впервые установлены и точно зафиксированы символической логикой (например, законы гипотетического силлогизма, упрощения, отделения и др. Законы эти, как и всякие простые высказывания, могут быть выражены формулами, построенными из элементарных логических связей. Но если формулы простых высказываний истинны лишь при определенных значениях переменной, а при остальных — ложны, то формулы логических законов всегда истинны или всегда ложны независимо от тех значений, которые принимает переменная. Иначе говоря, переменная здесь свободна и не нуждается ни в каких связывающих кванторах для того, чтобы из функциональной пропозиции превратиться в истинное или ложное высказывание.

Основная задача исчисления высказываний заключается в том, чтобы установить минимум тех общих всегда истинных формул (логических законов аксиом), которые необходимы и достаточны для того, чтобы из них вывести на основании определенных правил все остальные, всегда истинные формулы, выражающие логические отношения между нерасчлененными высказываниями.

Аксиоматика исчисления высказываний охватывает не всю совокупность всегда истинных логических формул, а лишь ту часть, которая обусловливает логические отношения между нерасчлененными высказываниями. Поэтому при переходе к логическим исчислениям высшего порядка (исчисления предикатов узкого и расширенного) и аксиоматика логической системы должна быть соответствующим образом дополнена и расширена. Но уже в пределах исчисления высказываний становится ясным, что отношения между элементарными логическими структурами в конечном итоге сводятся к отношению логического основания и следствия (формальной импликации).

В исчислении высказываний аксиомы (логические законы) не исследуются как самостоятельный объект, они не выводятся из элементарных высказываний путем обобщения, а вскрываются интуитивно (непосредственно) как заложенные в них начала[11]. Они рассматриваются здесь лишь с их оперативной стороны, поскольку они определяют взаимоотношения элементарных логических связей (в том числе и отношение между материальной и формальной импликацией).

Анализ этих закономерных отношений неизбежно приводит к парадоксу, заключающемуся в том, что, выявляя логические законы, приходится оперативно пользоваться теми же самыми связями и законами, которые подлежат определению. По этому поводу правильно замечает Р. Бланше: «Когда я хочу объяснить таблицу значений истинности символа, обозначающего дизъюнкцию, я говорю: $p \vee q$ истинно, если и только если p и q оба истинны, или p истинно и q ложно, или p ложно и q

[11] Термин «интуитивный» мы употребляем здесь в том его значении, которое придают ему советские логики и математики, имея в виду непосредственную самоочевидность или убедительность такого общего положения, объективное значение которого в данной логической системе еще не выявлено и в точности не проверено. В этом смысле интуиция не признается независимым от чувственного опыта источником познания (как, напр., в интуитивизме), а рассматривается как предвосхищение конечного результата, к которому приводит дискурсивный ход мышления. Такое предвосхищение возможно лишь в силу уже накопленного практического и теоретического опыта.

истинно. Ясно, что я (при этом) пользуюсь не только терминами «истинно» или «ложно» (которые мог бы заменить произвольными символами, напр., 1 и 0), но также и выражениями «если и только если» (эквивалентность, двойная импликация), «и» (конъюнкция) и даже «или» (сама дизъюнкция). Значит, одно и то же понятие имеет не только *символический* смысл, который точно зафиксирован аксиомами и таблицами истинности, но также *интуитивно оперативный* смысл, которым пользуются в метаязыке для объяснения аксиоматики и таблиц истинности»[12]. Указанный парадокс внутренне связан с присущей мышлению рефлективностью, с его способностью сделать и само себя, свою собственную структуру своим предметом, и потому представляет собой проблему металогики, изучающей имманентные предпосылки мышления, заложенные в нем операторы.

Можно ли признать решением этого парадокса одно лишь указание на то, что в металогике речь идет не о самих логических связях и высказываниях, а только о соответствующих им в символическом языке знаках, представляется сомнительным; ибо сами знаки (как знаки) имеют объективное значение, т. е. относятся к любым возможным предметам мышления (в том числе и к самому мышлению и его структуре), а эта предметная осмысленность символических знаков раскрывается в возможных моделях той или иной логической аксиоматики. То обстоятельство, что всякий символический знак есть и материальный объект (напечатанный, написанный), лишь подтверждает, что он удовлетворяет известным условиям логических констант (напр., тождества, различия)[13]. И логические законы, и операторы имеют — несмотря на свой формальный характер — известное содержание (интенсиональную сторону). Противоположность между формой и содержанием и в логике относительна. Абсолютизирование ее неизбежно приводит к метафизическому или идеалистическому различению (дуализму) априорного (формального) и апостериорного (опытного) знания.

VII

Насколько широко современная символическая логика употребляет в своих доказательствах (устанавливающих строгие логические связи) обобщающие значения слабой дизъюнкции, показывают такие примеры, как использование знака $\leqslant$ или введение в систему чисел числа 0 (нуль).

Согласно определению, отношение $\leqslant$ имеет место между двумя числами x и y в том и только в том случае, если $x<y$ или если $x=y$. Иначе говоря, это сумма двух отношений $x<y$ и $x=y$, т. е. тот более общий класс отношений, который удовлетворяется как всеми значениями $x < y$,

[12] *R. Blanché*, Introduction à la logique contemporaine, Paris 1957, p. 42.

[13] Ср. *Гетманов А. Д.*, О соотношении логики и математики в системах типа «Principia Mathematica». Сб. «Логические исследования». АН СССР, М., 1959, стр. 159 и след.

так и значениями $x = y$. Отношение $x \leqslant y$ эквивалентно отрицанию $x>y$ $(x \ngtr y)$, т. е. означает, что x не больше y и потому лишь в крайнем случае $x = y$. На первый взгляд может показаться, что формула противоречива или даже бессмысленна, поскольку нет и не может быть такой пары чисел, которая одновременно удовлетворяла бы оба отношения $x < y$ и $x = y$. Это вытекает из самого определения этих отношений, по которому они связаны между собой отношением исключающей дизъюнкции. Но формула $x=y \vee x<y$, т. е. сумма двух отношений $x=y$ и $x<y$, основана на отношении слабой дизъюнкции, которая не требует, а лишь не исключает той возможности, что оба эти отношения могут быть истинны. Во всяком случае она истинна, если хотя бы один из членов истинен ($x<y$ или же $x=y$). Вот почему и в тех формулах, в которых x и y заменяются определенными численными значениями, отношение $x \leqslant y$ не противоречиво или бессмысленно, а либо истинно, либо ложно. Так, напр., формулы $0 \leqslant 1$ и $0 \leqslant 0$ истинны, потому что в первой $0 < 1$, а во второй $0=0$ истинно; напротив, формула $1 \leqslant 0$ ложна, потому что оба члена дизъюнкции $1<0$ и $1=0$ ложны[14]. Значит, и здесь исход из менее сильной связи (слабой дизъюнкции) имеет в применении к математическим исчислениям известное преимущество большего удобства, объективная основа которого кроется в ее обобщающем характере. Присущие более слабой связи свойства и закономерности сохраняют свое значение и в тех более сильных связях, которые потенционально в ней заложены и являются результатом ее дифференциации или конкретизации.

VIII

Другим примером того методического приема, которым пользуется математическая логика, когда она строит формальную импликацию при помощи материальной и квантора общности, является, как отмечает Клини, введение в числовую систему числа нуль (0), а в теорию множеств — пустого множества (нулевой класс). И здесь употребление этих новых понятий приводит к более простым и сжатым формулировкам теорем[15].

Согласно определению Кантора, под множеством мы понимаем любое объединение в одно целое M определенных, вполне различаемых объектов из нашего восприятия или мысли, которые называются элементами M. Отсюда следует, что понятия множества и элемента соотносительны. Где есть множество, там есть и составляющие его элементы. В противоположность сложности множества, элементы рассматриваются как простые, далее неразложимые индивидуальные дискретные единства. Взаимоотношения между множествами определяются прежде всего их *эквивалентностью* (равномощностью), т. е. возможностью соотнести взаимооднозначно каждый элемент одного множества с одним и только одним элементом другого множества, или же их *неэквивалентностью*.

[14] Ср. *А. Тарский,* Введение в логику и методологию дедуктивных наук, § 46 и § 56.
[15] *Клини С. К.*, Введение в метаматематику, М., 1957, стр. 127.

Поскольку в этом последнем случае два множества связаны отношениями «больше» и «меньше», одно из них может быть некоторою частью, или подмножеством, другого, а потому и множество может рассматриваться не только как совокупность составляющих его элементов, но и как целое, образуемое входящими в него подмножествами, или частями, т. е. как множество множеств.

На понятии эквивалентности основано и канторовское определение кардинального, или количественного, числа. «То общее понятие, — говорит Кантор, — которое мы получаем с помощью нашей интеллектуальной активности, когда, отправляясь от множества *M*, мы абстрагируемся от природы его различных элементов и от порядка, в котором они нам даны, мы называем «мощностью», или кардинальным числом, множества *M*». Это значит, что, устанавливая эквивалентность какого-нибудь множества с множеством *M*, мы выделяем то общее, что имеется в этих множествах, независимо от различия и порядка их элементов, и образуем понятие класса всех равномощных множеству *M* множеств. Этот класс и есть то, что мы называем кардинальным числом или количеством элементов всех равномощных данному множеству *M* множеств. Таким образом, кардинальное число либо отождествляется с множеством всех множеств, эквивалентных множеству *M*, либо же определяется как некоторое индивидуальное «стандартное» множество, служащее кардинальным числом каждого множества данного класса.

Рассмотрим несколько подробнее те акты абстракции, в результате которых получаются понятия множества и числа. Поскольку множество есть объединение определенных предметов в одно целое, акт объединения связан и с выделением этих предметов из всех других, а выделение (так же, как и объединение) может быть произведено только на основании некоторого общего всем тем объектам признака, причем безразлично, будет ли этот признак чисто случайным, внешним или же имеющим существенное значение для природы объединяемых предметов. Только этот признак делает их элементами данного множества и сообщает им известную однородность, сколь различны они ни были бы в других отношениях.

В первоначальном смысле множество есть конкретное множество «чего-нибудь», т. е. каких-либо данных объектов (восприятия или мышления), которые в каком-либо отношении однородны, но вместе с тем как индивиды (индивидуальные определенности какой-либо предметной области) ясно отграничены друг от друга. Поэтому в понятии конкретного множества мы различаем его содержание, т. е. качественную однородность образующих его элементов, и его объем, т. е. количество этих элементов (напр., множество камней на каком-нибудь поле, множество букв алфавита определенного языка, множество видов, принадлежащих одному роду, и т. п.). Отсюда понятно, что два однородных конкретных множества могут иметь общие элементы, т. е. могут пересекаться, и что правильные подмножества какого-либо множества отличаются друг от друга не только числом входящих в них элементов, но и тем, какие элементы составляют данное подмножество (напр., если дано множество a, b, c, d, то различны будут не только его подмножества a и c, a и b, b и c, но и подмножества a, b, c и a, c, d или b, d, c). Конкретные множества характеризуются поэтому именованными числами, причем, однако, учитываются и индивидуальные различия их элементов.

Иначе обстоит дело с абстрактными множествами, которые находят свое выражение в отвлеченных количествах. Какой же акт абстракции совершает этот переход от конкретного к абстрактному множеству? По Кантору, он осуществляется тем, что образуется понятие класса, или множества, всех эквивалентных (равномощных) какому-либо данному множеству M множеств. В самом деле, при образовании такого класса мы отвлекаемся от всех тех предметно-качественных особенностей, отличающих одно множество от другого и одни элементы от других, и объединяем данные множества исключительно на основании их эквивалентности, т. е. возможности взаимооднозначного соотношения их элементов. А это и есть количественная сторона множества, поскольку она берется независимо от всякой предметной качественности, но не в том смысле, что количество совершенно отрывается от качественной стороны действительности (количество и в отвлеченном виде остается всегда количеством чего-то качественного), а в том смысле, что в абстрактном множестве количественный момент *инвариантен* по отношению к любому возможному качеству. В плане абстрактного множества не только эквивалентные множества вполне однородны и взаимозаменимы, но такая же однородность и взаимозаменяемость присуща и относящимся к тем множествам элементам: это не отличные друг от друга индивидуальные предметы a, b, c, d, а абстрактные бескачественные единицы — a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n. С тем, что в количественном (кардинальном) числе множества тематизируется сама количественность, т. е. становится самостоятельным предметом мышления, связана и специфическая особенность понятия кардинального числа. В понимании Кантора, оно составляет основную характеристику абстрактного множества, иначе говоря, определяет смысл или содержание этого понятия, между тем как обычно содержание какого-либо класса предметов обусловлено его качественной стороной, а его объем — количественной стороной. Как это понять? Значит ли это, что в понятии абстрактного числа, лишенного качественности, содержание и объем совпадают (тождественны)? Дело в том, что выражаемая кардинальным числом равномощность множеств является свойством этих множеств, иначе говоря, что сама количественность здесь становится особого рода качеством или свойством и, как таковое, определяет смысл или содержание понятия абстрактного множества. Это можно выразить и таким образом: кардинальное число, как множество всех множеств, эквивалентных некоторому стандартному множеству M, есть предикат от предикатов этих множеств, т. е. предикат второй степени. Отсюда получается и общее определение отвлеченного числа, как такового: стоит лишь то индивидуальное множество M, которое в данном случае определяет эквивалентность, обратить в переменную, которая может принять любое количественное значение, и число вообще будет тогда предикатом третьей степени[16]. В этой характеристике числа проявляется своеобразная диалектическая связь качества и количества, присущая объектам математики: само количество здесь приобретает характер качества.

IX

Итак, если кардинальное число есть основная характеристика абстрактного множества, которое определяется как множество всех равномощных между собой конкретных множеств, то что же означает тогда нуль, т. е. число, в котором отрицается именно этот момент количественности? Не является ли понятие такого числа внутренне противоречивым?

Если подойти к этому вопросу с точки зрения исторического происхождения общепринятой теперь системы счисления, то изобретение нуля несомненно обусловлено прежде всего теми потребностями, которые естественно возникли уже в глубокой древности (напр., у вавилонян) в связи с практикой счета при выполнении арифметических действий над числами, при измерении всякого рода скалярных и в особенности аддитивных величин (веса, длины, объема и т. п.), при астрономических вычислениях, коммерческих расчетах и пр. Поскольку эти операции (напр. вычитание) могли дать в итоге не только некоторое количественное значение подлежащей определению величины, но и привести к полному ее исчезновению, то и этот результат надо было отметить определенным знаком. Греческие астрономы, которые лишь усовершенствовали заимствованную у вавилонян систему счисления, пользовались для этой цели знаком кружка, являющимся сокращением греческого слова οὐδέν — «ничто». Индусы и арабы употребляли в том же смысле другие символы (напр., точки)[17]. Выражая лишь голое отсутствие какого-либо численного значения определяемой величины, нуль не есть еще число наравне с другими числами, т. е. число, над которым и с которым могут производиться любые арифметические действия. Числом в точном смысле он становится лишь тогда, когда он подчиняется наряду с другими числами тем условиям, которые являются общими как для шестидесятеричной, так и для десятичной системы чисел, т. е. установлению различных разрядов чисел и их позиционного значения. Любое число в этом смысле строится путем сложения единиц лишь в пределах одного разряда, т. е. того числа (множества) *n*, которое условно положено в основу деления на разряды. Разряды отличаются друг от друга степенью числа *n*, взятого за единицу. Каждая цифра имеет поэтому, кроме своего непосредственного значения (как определенной совокупности единиц), еще и позиционное значение, зависящее от того, какого разряда единицы она обозначает. Такое позиционное значение должен иметь и нуль, поскольку при записи многоразрядного числа необходимо отметить и отсутствие

---

[16] Ср. *Д. Гильберт* и *В. Аккерман*, Основы теоретической логики, стр. 176—182.

[17] *Б. Л. Ван дер Варден*, Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона, Греции, М., 1959, стр. 77—79 и примечания переводчика.

единиц того или другого разряда, притом независимо от того, пишутся ли числа в восходящей или нисходящей последовательности. Дальнейший шаг в развитии понятия нуля заключается в том, что нуль включается в закономерный строй числового ряда и за ним закрепляется определенное место, которым может быть (особенно при записи в возрастающей последовательности) только непосредственно предшествующее единице место, а постольку и первое место во всем ряде натуральных чисел. Таким образом, нуль, будучи введен в расширенный ряд чисел, нуль, как первое его число, становится носителем тех признаков, которые определяют общую закономерность всего ряда, т. е. закономерность, устанавливающую, что каждое натуральное число получается из непосредственно предыдущего тем же действием, которым единица получается из нуля: $0+1=0'=1$ и $0+a'=(0+a)'=a'$. Эта же закономерность обусловливает и возможность индуктивных (рекурсивных) определений и доказательств.

Вместе с дальнейшим расширением понятия числа путем перехода к двустороннему ряду положительных и отрицательных чисел и далее к рациональным и действительным числам соответственно меняются и дифференцируются аспекты нуля и те функции, которые он выполняет в различных исчислениях (напр., нуль как нейтральное число, разделяющее и вместе с тем связывающее ряды положительных и отрицательных чисел, или нуль как предел закономерно убывающих рядов и т. п.). На этом дальнейшем развитии понятия нуля мы не будем останавливаться. Нам было лишь важно показать, что установленная Пеано аксиоматика натуральных чисел, на которой базируется вся современная теоретическая арифметика, органически связана с признанием нуля необходимым структурным элементом теории чисел. Это значит, что понятие нуля как числа в полном смысле слова могло возникнуть лишь тогда, когда выработалось понятие отвлеченного множества и числа, т. е. когда множества уже не рассматривались как отдельные эмпирические данные, обладающие такою же самостоятельностью, как и те вещи, с которыми они в опыте связаны, и находящиеся лишь во внешних отношениях к другим множествам. Отсюда понятно, что понятие нуля как равноправного члена ряда чисел еще отсутствует в древнегреческой математике, которая еще не освободилась вполне от представления о своеобразной предметной качественности основных чисел и связывала их с известной геометрической фигуральностью. Когда же основной характеристикой чисел становится их эквивалентность или неэквивалентность, то решающее значение приобретают именно их взаимоотношения, их функциональные связи, их подчиненность закономерно построенному ряду, в котором каждое число занимает определенное, только ему свойственное место. К характеристике числа как количества присоединяется его *порядковое* значение, которое присваивается и нулю как первому члену числового ряда. Число вообще, как таковое, обращается в переменную, пробегающую в строго однозначном порядке все возможные значения от нуля до бесконечности.

Если числом признается то, что не имеет количества, то этот парадокс объясняется прежде всего тем, что нуль определяется не как изолированный объект, а через его отношение к другим числам, через его место в ряде чисел. Отрицание количественной стороны числа не есть огульное отрицание числа вообще, оно не поражает его порядкового значения и потому не выходит за пределы области исчисляемого. Это можно выразить еще иначе: понятие числа так же, как и всякое другое понятие, имеет содержание и объем или, выражаясь терминами Карнапа, «интенсионал» и «экстенсионал». Понятие может не иметь реального объема, если ему не соответствует ни один объект в действительности. Но содержание (смысл) понятия от этого не меняется, оно мыслится тогда как понятие таких объектов, существование которых допускается как возможное. А содержание понятия нуля определяется его местом в числовом ряде. Но если это так, если вопрос о значении нуля упирается в вопрос о взаимоотношениях содержания и объема понятия, то ясно, что проблема эта в основе своей *не математическая, а логическая.* Она возникает в логическом плане, когда в исчислении предикатов последние истолковываются не со стороны содержания, как свойства, а со стороны объема, как класса. В суждениях о принадлежности индивидуальных предметов, или подклассов, к определенному классу объем класса определяется его логической валентностью, т. е. совокупностью тех предметов, или подклассов, которые удовлетворяют условиям «интенсионала» (содержания) данного класса. Если таких индивидуальных предметов нет, то класс в данной предметной области не имеет реального объема, он оказывается пустым или нулевым. Но если в понятии класса на первый план и выступает объемная сторона понятия, то все же в нем предполагается или подразумевается и содержательная сторона, устанавливающая определенную однородность входящих в класс предметов и тем самым фиксирующая его единство. В этом смысле класс всегда есть некоторое конкретное (предметное) множество. Когда же мы отвлекаемся от содержательной основы класса, т. е. когда его качественная сторона становится для нас безразличной, класс обращается в абстрактное множество, которое характеризуется количественным числом (в понимании Кантора). Но это не значит, как мы видели, что в абстрактном множестве предметная качественность совершенно исчезает или уничтожается; функцию качественности здесь берет на себя упорядоченность и закономерность самой количественности, которая как переменная принимает в индивидуальных числах разные значения, в том числе и значение нуля. В этом смысле число нуль есть лишь та особая форма, которую принимает нулевой (пустой) класс в области математики. Роль пустого класса в современной логике и те изменения, которые внесло его признание в классическую концепцию логики, требуют отдельного рассмотрения. Сейчас мы лишь вкратце еще раз укажем, в чем заключается аналогия между тем методическим подходом, который современная логика применяет к проблеме формальной импликации, и тем, который используется ею для определения абстрактного числа (множества), каким является нуль.

В основу построения формальной импликации, т. е. той логической связи, которая определяет строй дедуктивных наук, кладется наиболее слабая связь высказываний, а именно слабая дизъюнкция и различные ее видоизменения, в которых: 1) отсутствуют присущая формальной импликации содержательность и связанная с ней внутренняя (смысловая) необходимость и 2) ограничиваются фиксированием различных случаев фактического совпадения истинности или ложности двух или нескольких простых высказываний. Логическая система исчисления высказываний имеет поэтому чисто экстенсиональный характер; любая элементарная матрица характеризуется здесь ее логической валентностью, т. е. совокупностью тех случаев, которые удовлетворяют условиям ее истинности. Включение ослабленных связей в понятие логической связи представляет собою такое его расширение, которое открывает путь обобщающей формализации всей логической системы, т. е. созданию такого символического языка, который выявляет общую структуру логической мысли, одинаково применимую к различным областям научного знания, т. е. допускающую различные содержательные интерпретации. Так и материальная импликация, как определенный вид слабой дизъюнкции, в сочетании с квантором общности служит формализованным выражением формальной импликации.

Правда, формализация, основанная на принципе экстенсиональности, не решает еще полностью проблемы логической связи основания и следствия, ибо оставляет в стороне момент интенсиональной необходимости, т. е. присущей ей модальности, или решает ее лишь частично, поскольку сводит формальную импликацию к тавтологии (аналитическому тождеству). Однако вопрос о том, исчерпывается ли логическая необходимость одной тавтологией, еще не нашел в современной логике окончательного однозначного решения.

Аналогичными актами абстракции и обобщения характеризуется и введение нуля в систему натуральных чисел. Оно означает расширение понятия числа, но такое расширение, которое осуществляется через отрицание количественности числа, т. е. признака, который первоначально считается самым существенным. Но это отрицание количественности имеет и положительное значение, оно внутренне связано с более глубоким пониманием числа, взятого не в отдельности, как конкретное множество, а как множество абстрактное, являющееся необходимым членом закономерно упорядоченного ряда чисел.

В обоих разобранных нами примерах четко вырисовывается диалектический ход мышления, раскрывающий при помощи отрицания более глубокие и широкие связи логических и математических объектов.

Vilniaus Valstybinis
V. Kapsuko vardo universitetas
Filosofijos katedra

Įteikta
1961 m. balandžio mėn.

MATERIALIOSIOS IMPLIKACIJOS METODINĖS REIKŠMĖS KLAUSIMU

V. SEZEMANAS

Reziumė

Šio straipsnio uždavinys yra atsakyti į klausimą, kodėl pasakymų išskaičiavimui, nustatančiam logikos pradmenis, dedama pagrindan *ne formalioji implikacija* (pagrindo ir sekmens būtinas ryšys), o vadinamoji *materialioji implikacija,* kurioje nėra būtino ryšio tarp p ir q ir kuri įgauna ypatingą metodinę reikšmę logikos sistemos formalizavimui. Šiam klausimui išaiškinti nagrinėjami materialiosios implikacijos santykiai su kitais pagrindiniais pasakymų ryšiais (su silpnąja bei griežtąja disjunkcija, konjunkcija ir ekvivalentiškumu) ir palyginami visi šie ryšiai loginio stiprumo ir didesnio ar mažesnio daugiareikšmiškumo atžvilgiu. Ši analizė parodo, kad materialioji implikacija yra ypatinga silpnosios disjunkcijos forma, pasižyminti šiomis savybėmis: 1) iš keturių galimų materialiosios implikacijos reikšmių trys yra teisingos, o viena klaidinga; 2) materialiosios implikacijos nariai p ir q turi priešingas reikšmes ($+$ ir $-$); silpnosios disjunkcijos $p \vee q$ simetriškumas užleidžia vietą asimetriškumui ($p \rightarrow q$) reiškia $\bar{p} \vee q$ ar $\overline{p \cdot \bar{q}}$, o tuo pačiu užfiksuojamas skirtumas tarp antecedento ir konsekvento, kurie negali pasikeisti vietomis, nepakeičiant tuo implikacijos loginės prasmės. Iš to aiškėja, kad materialiosios ir formaliosios implikacijos panašumas (būtent tai, kad ir viena, ir antra atmeta tik derinį $p \cdot \bar{q}$, o prileidžia visus kitus p ir q derinius) yra neatsitiktinis dalykas ir remiasi tam tikru abiejų ryšių struktūriniu vienodumu. Šiuo atžvilgiu materialioji implikacija yra būtina, bet nepakankama formaliosios implikacijos sąlyga. Tos pasakymų p ir q kombinacijos, kurios atitinka materialiosios implikacijos teisingumo sąlygas, derinasi su formaliąja implikacija, bet neapsprendžia jos vidinio būtinumo ir todėl negali jos visiškai formalizuoti. Tam reikalingos stipresnės loginės priemonės, kurias gali paruošti tik aukštesnė už pasakymų išskaičiavimą, labiau diferencijuota loginė sistema, pavyzdžiui, predikatų logika ryšium su atitinkama metalogika, nustatančia bendriausius struktūrinius loginio mąstymo dėsningumus.

Vadinasi, materialiosios implikacijos metodinė reikšmė pasireiškia tuo, kad ji tarnauja apibendrinančiam formaliosios implikacijos ryšių formalizavimui. Kaip plačiai šiuolaikinė simbolinė logika naudoja šitą formalizavimo metodą, remdamasi pasakymų išskaičiavimo nustatytais ryšiais, galima pailiustruoti ir kitais pavyzdžiais. Šitame straipsnyje pateikiami du tokie pavyzdžiai iš matematinės logikos: ženklo $\leqslant$ vartojimas ir nulio įvedimas į natūraliųjų skaičių sistemą.