DAUGIAVARIANČIO IŠPLĖSTINIO ATSTATYMO PROCESO DIDŽIŲJŲ SKAIČIŲ DĖSNIS

Vaidotas Kanišauskas, Auksė Petrauskytė, Dovilė Petrauskytė-Caronkienė
Šiaulių universitetas, Informatikos, matematikos, e. studijų institutas

Įvadas

Atstatymo procesas

$$N(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}(S_n\le t),\ t\ge 0,\ S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

$X_1,\dots,X_n$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę teigiami atsitiktiniai dydžiai, taikomi įvairiuose matematiniuose modeliuose. Iš tų taikymų atsirado atskira matematikos šaka, vadinama atstatymo teorija. Gauti tokie atstatymo proceso pagrindiniai rezultatai: jo kompensatorius natūraliosios σ-algebros atžvilgiu, didžųjų skaičių dėsnis, centrinė ribinė teorema, didžiųjų nuokrypių greičio funkcija [1, 5, 6, 8]. Po to buvo kuriami sudėtingesni atstatymo procesai:

- laiko atžvilgiu – išplėstinis atstatymo procesas

$$N_\alpha(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}(S_n\le n^\alpha t),$$

čia $\alpha\ge 0$, $t\ge 0$;

- komponenčių atžvilgiu – daugiavariantis atstatymo procesas

$$N(t_1,\dots,t_m)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}(S_n^1\le t_1,\dots,S_n^m\le t_m),$$

čia $t_i\ge 0$, $i=1,\dots,m$, $S_n^j=\sum_{i=1}^{n}X_i^j$, $X_1^j,\dots,X_n^j$ – nepriklausomi, vienodai pasiskirstę teigiami atsitiktiniai dydžiai.

Sudėtingiausias yra daugiavariantis išplėstinis atstatymo procesas

$$N_\alpha(t_1,\dots,t_m)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}(S_n^1\le n^\alpha t_1,\dots,S_n^m\le n^\alpha t_m),\qquad (1)$$

čia $t_i\ge 0$, $i=1,\dots,m$.

Vienas iš autorių ankstesniame darbe [3], nustatydamas didžiųjų skaičių dėsnį, naudojo platesnę klasę taškinių procesų nei daugiavariančiai išplėstiniai atstatymo procesai. Po to buvo pastebėta, kad analogiški rezultatai galioja ir esant silpnesniems apribojimams, negu buvo naudoti tame darbe. Tačiau perėjimas prie silpnesnių apribojimų nėra toks paprastas – jis reikalauja platesnių komentarų ir analizės. Šiame darbe siekiama ne tik gauti naują vienos konkrečios taškinių procesų klasės rezultatą, bet ir parodyti jo ryšį su analogišku ankstesniu rezultatu iš platesnės procesų klasės.

Darbo tikslas – nustatyti daugiavariančio išplėstinio atstatymo proceso didžiųjų skaičių dėsnį.

Uždaviniai:

1) įrodyti didžiųjų skaičių dėsnį, galiojantį daugiavariančiam išplėstiniam atstatymo procesui, esant silpniausioms prielaidoms;
2) atsekti gauto rezultato ryšį su platesne skaičiuojančių procesų klase.

Tyrimo metodai: analitinis, tikimybinis ir lyginamasis.

Straipsnyje tęsiami darbai, pradėti [2, 3, 7].

1. Didžiųjų skaičių dėsnis

Straipsnyje [3] V. Kanišauskas nagrinėjo bendresnį daugiavariantį skaičiuojantį procesą

$$N_t(x_1,\dots,x_m)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}(\mathrm{T}_n^1\le x_1 t,\dots,\mathrm{T}_n^m\le x_m t),$$

kuris sutampa su (1) procesu, kai $\mathrm{T}_n^j=S_n^j$ ir $t=n^\alpha$ arba $\mathrm{T}_n^j=n^{-\alpha}S_n^j$, $t=1$.

Nagrinėjant tikimybinių matų, gautų normuojant atsitiktinius procesus, didžiuosius nuokrypius yra visuotinai nustatytas jų ryšys su tų procesų didžiųjų skaičių dėsniais [4]. Paprastai sakant, jei galioja atitinkamas didžiųjų skaičių dėsnis, vadinasi, galioja ir atitinkamos didžiųjų nuokrypių nelygybės. Tik visa bėda, kad didžiųjų nuokrypių rezultatams paprastai reikia stipresnių (vadinamųjų Kramerio) sąlygų nei tos, kurioms esant galioja didžiųjų skaičių dėsnis (čia dažnai pakanka tam tikrų atsitiktinių dydžių vidurkio egzistavimo). Tačiau teisingas ir atvirkštinis ryšys – galiojant didžiųjų nuokrypių Kramerio sąlygai, nesunku gauti ir atitinkamų procesų didžiųjų skaičių dėsnį. Tokią procedūrą V. Kanišauskas ir panaudojo savo [3] darbe. Tam jis siekė praplėsti taikymo ribas, nors dėl to aukojo galiojimo sąlygas – jos tapo griežtesnės.

$N_t(x_1,...,x_m)$ procesui buvo įvesta tokia asimptotinė Kramerio sąlyga:

A sąlyga. Egzistuoja teigiami skaičiai $\beta_1,...,\beta_m$ ir diferencijuojamos funkcijos $\Psi^i_{\beta_i}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$, kad $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{E}\exp\{\lambda n^{1-\beta_i} \mathrm{T}^i_n\} = \Psi^i_\beta(\lambda) < \infty$, kai i = 1,...,m, o $\mathbf{E}$ žymi matematinį vidurkį.

Kad geriau suprastume ryšį tarp ankstesnio ir dabartinio rezultato, susipažįstame su 1 teorema.

1 teorema [3]. Jei patenkinta A sąlyga, tai P-beveik visur (sutrumpinus P-b.v.)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_i(t)}{t^{\frac{1}{\beta_i}}} = \left(\frac{1}{a_i}\right)^{\frac{1}{\beta_i}},\ i = 1,...,m,$$

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{\beta}} N_t(x_1,\dots,x_m) = \mathbf{B},$$

čia

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \min_{j\in\{1,\dots,m\}} (x_j/a_j)^{1/\beta}, & \text{kai } \beta = \beta_1 = \dots = \beta_m, \\ \min_{j\in\{i_1,\dots,i_k\}} (x_j/a_j)^{1/\beta}, & \text{kai } \beta = \beta_{i_1} = \dots = \beta_{i_k} > \beta_j, k \ge 1, i_1,\dots,i_k, j \in \{1,\dots,m\}, \\ 0, & \text{kai } \beta = \beta_i < \beta_j,\ i \ne j,\ i,j \in \{1,\dots,m\}, \end{cases}$$

$$N_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}(\mathrm{T}^i_n \le t),\ a_{\mathrm{i}} = \left(\Psi^i_{\beta_{\mathrm{i}}}(x)\right)'\Big|_{\mathrm{x}=0}.$$

1 lema [3]. Jei patenkinta A sąlyga, tai P-b.v.

$$0 < \lim_{t\to\infty} n^{-\beta_i} \mathrm{T}^i_n = a_i < \infty,$$

kai $i = 1,...,m$.

Šios lemos rezultatas gali būti nauja sąlyga.

B sąlyga. Atsitiktiniai dydžiai T^i_n yra tokie, kad P-b.v.

$$0 < \lim_{t\to\infty} n^{-\beta_i} \mathrm{T}^i_n = a_i < \infty$$

su tam tikru $\beta_i > 0$, kai i = 1,...,m.

2 lema. Jei patenkinta B sąlyga, tai P-b.v. $\lim_{t\to\infty} \frac{N_i(t)}{t^{\frac{1}{\beta_i}}} = \left(\frac{1}{a_i}\right)^{\frac{1}{\beta_i}}$, $i = 1,...,m$,

čia $N_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}(\mathrm{T}^i_n \le t)$.

Įrodymas. Iš $N_i(t)$ apibrėžimo gaunama nelygybė $\mathrm{T}^i_{N_i(t)-1} \le t < \mathrm{T}^i_{N_i(t)+1}$.

Iš čia $\frac{\mathrm{T}^i_{N_i(t)-1}}{N_i(t)^{\beta_i}} \le \frac{t}{N_i(t)^{\beta_i}} < \frac{\mathrm{T}^i_{N_i(t)+1}}{N_i(t)^{\beta_i}}$.

Tarkime, kad patenkinama B sąlyga. Tada $N_i(+\infty) = +\infty$. Perėjus prie ribos, kai $t \to \infty$, gaunamas lemos rezultatas. Teorema įrodyta.

Pastabos. 1) Jei A ir B sąlygomis $\beta_i \equiv 1$, o $\mathrm{T}^i_n = S^i_n = \sum_{k=1}^{n} X^i_k$, $X^i_1,...,X^i_n$ – nepriklausomi, vienodai pasiskirstę teigiami atsitiktiniai dydžiai, tai A sąlyga pavirsta klasikine Kramerio sąlyga.

C sąlyga. Atsitiktiniai dydžiai X^i_1 tokie, kad $\mathbf{E}\exp\{\lambda X^i_1\} < \infty$ su tam tikru $\lambda > 0$, kai $i = 1,...,m$.

B sąlyga virsta stipriuoju didžiųjų skaičių dėsniu:

P-b.v.

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{S^i_n}{n} = a_i < \infty,$$

kai $i = 1,...,m$.

Tačiau gerai žinoma, kad šis klasikinis rezultatas galioja esant D sąlygai [7].

D sąlyga. Atsitiktiniai dydžiai X^i_1 turi baigtinį vidurkį

$$\mathbf{E}X^i_1 = a_i < \infty,$$

kai $i = 1,...,m$.

Akivaizdu, kad D sąlyga yra daug silpnesnė už A ir C sąlygas.

2) Kita vertus, 1 teoremos rezultatas galioja tik dėl D sąlygos, jei $\mathrm{T}^i_n = n^{-\alpha} S^i_n$ ir $\beta_i \equiv \beta = 1 - \alpha$, nes šiuo atveju $n^{-\beta_i}\mathrm{T}^i_n = \frac{S^i_n}{n}$. Tuo galima įsitikinti peržiūrėjus 2 teoremos įrodymą, kuris pateiktas žemiau.

Dabar galime suformuluoti vieną iš pagrindinių darbo rezultatų.

2 teorema. Tegul nepriklausomi, vienodai pasiskirstę teigiami atsitiktiniai dydžiai X_1^i turi baigtinį vidurkį $\mathbf{E}X_1^i = a_i < \infty$, kai $i = 1,\ldots,m$, tai P-b.v.

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\frac{1}{1-\alpha}} N_\alpha(tx_1,\ldots,tx_m) = \min_{i\in\{1,\ldots,m\}}\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

čia

$$N_\alpha(tx_1,\ldots,tx_m) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}\left(S_n^1 \le n^\alpha tx_1,\ldots,S_n^m \le n^\alpha tx_m\right).$$

Įrodymas. Tegu

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \vee \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \vee \ldots \vee \left(\frac{x_m}{a_m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \max\left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},\left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},\ldots,\left(\frac{x_m}{a_m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right).$$

Apibrėžiame naujus procesus:

$$N_\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}\left(\mathrm{T}_n^1(\alpha)\vee \mathrm{T}_n^2(\alpha)\vee\ldots\vee \mathrm{T}_n^m(\alpha)\le s\right),$$

čia $\mathrm{T}_n^i(\alpha) = \frac{S_n^i}{n^\alpha}$, kur $i = \overline{1,m}$.

$$N_\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_m,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}\left(\frac{\mathrm{T}_n^1(\alpha)}{x_1}\vee\frac{\mathrm{T}_n^2(\alpha)}{x_2}\vee\ldots\vee\frac{\mathrm{T}_n^m(\alpha)}{x_m}\le t\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}\left(\frac{S_n^1}{n^\alpha x_1}\vee\frac{S_n^2}{n^\alpha x_2}\vee\ldots\vee\frac{S_n^m}{n^\alpha x_m}\right),$$

$$N_{\alpha,1}(tx_1) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}\left(\mathrm{T}_n^1(\alpha)\le tx_1\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}\left(\frac{S_n^1}{n^\alpha}\le tx_1\right),$$

$$N_{\alpha,2}(tx_2) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}\left(\mathrm{T}_n^2(\alpha)\le tx_2\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}\left(\frac{S_n^2}{n^\alpha}\le tx_2\right),$$

$$N_{\alpha,m}(tx_m) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}\left(\mathrm{T}_n^m(\alpha)\le tx_m\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}\left(\frac{S_n^m}{n^\alpha}\le tx_m\right).$$

Kadangi

$$N_{\alpha,1}(tx_1,tx_2,\ldots,tx_m) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}\left(\mathrm{T}_n^1(\alpha)\le tx_1\right)\mathbf{1}\left(\mathrm{T}_n^2(\alpha)\le tx_2\right)\ldots\mathbf{1}\left(\mathrm{T}_n^m(\alpha)\le tx_m\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}\left(\frac{S_n^1}{n^\alpha}\le tx_1\right)\mathbf{1}\left(\frac{S_n^2}{n^\alpha}\le tx_2\right)\ldots\mathbf{1}\left(\frac{S_n^m}{n^\alpha}\le tx_m\right),$$

tai akivaizdu, kad

$$N_\alpha(tx_1,tx_2,\ldots,tx_m)\le N_{\alpha,1}(tx_1),$$

$$N_\alpha(tx_1,tx_2,\ldots,tx_m)\le N_{\alpha,2}(tx_2),$$

$$N_\alpha(tx_1,tx_2,\ldots,tx_m)\le N_{\alpha,m}(tx_m).$$

Nesunku pastebėti, kad galioja nelygybės:

$$N_\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_m,t)\le N_\alpha(tx_1,tx_2,\ldots,tx_m)\le N_{\alpha,1}(tx_1)\wedge N_{\alpha,2}(tx_2)\wedge\ldots\wedge N_{\alpha,m}(tx_m). \qquad (2)$$

Kai $0 < a_1 < \infty$, $0 < a_m < \infty$, ... , $0 < a_m < \infty$, tai, pritaikius 2 lemą, vienmačiams atstatymo procesams $N_{\alpha,1}(x)$, $N_{\alpha,2}(x)$, ..., $N_{\alpha,m}(x)$ su tikimybe vienas galioja formulės:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{N_{\alpha,1}(x)}{x^{\frac{1}{1-\alpha}}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{1-\alpha}}},\ \lim_{x\to\infty}\frac{N_{\alpha,2}(x)}{x^{\frac{1}{1-\alpha}}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{1-\alpha}}},\ \ldots,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{N_{\alpha,m}(x)}{x^{\frac{1}{1-\alpha}}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{1-\alpha}}}.$$

Perrašę $x = xt$, gauname, kad P-b. v.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{N_{\alpha,i}(tx_i)}{(tx_i)^{\frac{1}{1-\alpha}}} = \frac{1}{a_i^{\frac{1}{1-\alpha}}},\ i = \overline{1,m}. \qquad (3)$$

Tai P-b.v.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{N_{\alpha,1}(tx_1)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} = \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},\ \lim_{x\to\infty}\frac{N_{\alpha,2}(tx_2)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} = \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$,\ldots,\ \lim_{x\to\infty}\frac{N_{\alpha,m}(tx_m)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} = \left(\frac{x_m}{a_m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Iš (2) ir (3) formulės dešinės pusės išplaukia, kad

$$\mathrm{P}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{N_\alpha(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} \le \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \wedge \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \wedge \ldots \wedge \left(\frac{x_m}{a_m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) = 1. \tag{4}$$

Įrodysime priešingą nelygybę.

Kadangi $\mathrm{E}X_i^1 = a_1$ $\mathrm{E}X_i^2 = a_2$, ..., $\mathrm{E}X_i^m = a_m$, tai pagal sustiprintą didžiųjų skaičių dėsnį P-b. v.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^1}{n} = a_1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n^2}{n} = a_2, \ldots, \lim_{n\to\infty}\frac{S_n^m}{n} = a_m,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^1}{n} \vee \frac{S_n^2}{n} \vee \ldots \vee \frac{S_n^m}{n} = a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_m.$$

Iš 2 lemos matyti, kad bet kuriam atstatymo procesui

$N_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}(\mathrm{T}_n \le x)$, jei P-b. v.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{T}_n}{n} = a_i$, tai P-b. v. ir $\lim_{x\to\infty}\frac{N_i(x)}{n} = \frac{1}{a_i}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{N_i(x)}{n} = \frac{1}{a_i}.$$

Jei $N(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}(S_n^1 \vee S_n^2 \vee \ldots \vee S_n^m \le s)$, tai

$$\mathrm{P}\left(\lim_{s\to\infty}\frac{N(s)}{s} = \frac{1}{a_1} \wedge \frac{1}{a_2} \wedge \ldots \wedge \frac{1}{a_m} \right) = 1\cdot$$

Turime $\mathrm{P}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{N_{\alpha,i}(x)}{x^{\frac{1}{1-\alpha}}} = \frac{1}{a_i^{\frac{1}{1-\alpha}}} \right) = 1\cdot$

Vadinasi, analogiškai galime užrašyti, kad

$$\mathrm{P}\left(\lim_{s\to\infty}\frac{N_\alpha(s)}{s^{\frac{1}{1-\alpha}}} = \frac{1}{a_1^{\frac{1}{1-\alpha}}} \wedge \frac{1}{a_2^{\frac{1}{1-\alpha}}} \wedge \ldots \wedge \frac{1}{a_m^{\frac{1}{1+\alpha}}} \right) = 1\cdot \tag{5}$$

Todėl pasinaudoję $N_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$ ryšiu su $N_\alpha(s)$ ir (5) formule, gauname

$$\mathrm{P}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{N_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} = \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \wedge \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \wedge \ldots \wedge \left(\frac{x_m}{a_m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) = 1.$$

Sujungdami šią formulę su (4), dėl (2) sąryšio gauname, kad

$$\mathrm{P}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{N_\alpha(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m)}{t^{\frac{1}{1-\alpha}}} = \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \wedge \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \wedge \ldots \wedge \left(\frac{x_m}{a_m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right) = 1.$$

Teorema įrodyta.

Literatūra

1. Karr A. F., 1986, *Point Process and Their Statistical Inference*. Dekker, New York.
2. Kanišauskas V., 2000, *Large devations for counting processes*, Liet. matem. rink. Nr. 40. Spec. nr. Vilnius. P. 287–289.
3. Kanišauskas V., 2007, *Daugiamačių skaičiuojančių procesų didžiųjų skaičių dėsnis.* Liet. matem. rink. Nr. 47. Spec. nr. P. 49–52.
4. Ellis R. S., 1985, *Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics*, Springer, Berlin.
5. Tiefeng J., 1994, *Large deviations for renewal processes, Stochastic Process*. Appl. 50. P. 57–71.
6. Боровков А. А., 1976, *Теория вероятностей*. Москва.
7. Канишаускас В., 2003, *Большие уклонения многомерных считающих процессов*, Liet. matem. rink. 43. Spec. nr. P. 99–103.
8. Линьков Ю. Н., 1993, *Асимптотические методы статистики случайных процессов*. Киев: Наукова думка.

Summary

THE LIMIT THEORIES OF MULTIVARIATE EXTENDED RENEWAL PROCESS

V. Kanišauskas, A. Petrauskytė, D. Petrauskytė-Caronkienė

The authors of this paper consider a multivariate extended renewal process. For the multivariate case the law of large numbers under the simplest conditions of validity was established.

Keywords: multivariate extended renewal process, law of large numbers.

Santrauka

DAUGIAVARIANČIO IŠPLĖSTINIO ATSTATYMO PROCESO DIDŽIŲJŲ SKAIČIŲ DĖSNIS

V. Kanišauskas, A. Petrauskytė, D. Petrauskytė-Caronkienė

Darbe nagrinėjami vienmačiai ir daugiavariančiai išplėstiniai atstatymo procesai. Daugiavariančių atveju įrodomas didžiųjų skaičių dėsnis, kai patenkintos silpniausios sąlygos.

Prasminiai žodžiai: daugiavariantis išplėstinis atstatymo procesas, didžiųjų skaičių dėsnis.

Įteikta 2015-08-25
Priimta 2015-10-30