LMD konf. darbai, 353–356
1997, Vilnius

Daugiamačių atsitiktinių dydžių maksimumo tankio konvergavimo greitis

A. Jokimaitis (MII, KTU)

Sakykime, kad $\{X_j = (X_{1,j}, X_{2,j}),\ j \geqslant 1\}$ – nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių dvimačių atsitiktinių dydžių (a.d.) su pasiskirstymo funkcija $F(x)$ ir tankiu $p(x)$, seka. Čia $x = (x_1, x_2)$ – dvimatės Euklido erdvės taškas.

Apibrėžiame dvimatį a.d.

$$Z_n = \big(\max\big(X_{1,1}, \dots, X_{1,n+2}\big), \max\big(X_{2,1}, \dots, X_{2,n+2}\big)\big).$$

Aritmetinius veiksmus tarp vektorių apibrėšime pagal koordinates, t.y.

$$x + y = \big(x_1 + y_1, x_2 + y_2\big), \qquad xy = \big(x_1 y_1, x_2 y_2\big),$$

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}\right),$$

o nelygybė $x < y$ reikš nelygybių sistemą $x_i < y_i$ $(i = 1, 2)$.

Tarkime, kad egzistuoja tokios centravimo ir normavimo vektorių sekos

$$\big\{a_n = \big(a_{1,n}, a_{2,n}\big),\ n \geqslant 1\big\}, \qquad \big\{b_n = \big(b_{1,n}, b_{2,n}\big),\ b_{1,n}, b_{2,n} > 0,\ n \geqslant 1\big\},$$

kad

$$\lim_{n\to\infty} n\big(1 - F\big(a_n + b_n x\big)\big) = u(x) > 0.$$

Tuomet

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) = e^{-u(x)} = H(x), \tag{1}$$

čia H – neišsigimusi dvimatė pasiskirstymo funkcija.

Tarkime, kad skirstinys H turi tankį

$$\frac{\partial^2 H(x)}{\partial x_1 \partial x_2},$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = \frac{\partial^2 H(x)}{\partial x_1 \partial x_2}, \tag{2}$$

čia

$$p_n(x) = (n+2)b_{1,n}b_{2,n}F^n(a_n+b_nx)$$
$$\times\left((n+1)\frac{\partial F(a_n+b_nx)}{\partial x_1}\frac{\partial F(a_n+b_nx)}{\partial x_2} + F(a_n+b_nx)p(a_n+b_nx)\right)$$

– dvimačio a.d. $(Z_n - a_n)/b_n$ tankis.

Pastebėsime, kad (2) sąlygos tenkinimo turime pareikalauti papildomai, kadangi iš konvergavimo integralinėje teoremoje besąlygiškai neišplaukia konvergavimas lokalinėje teoremoje. Skirstinys F turi tenkinti tam tikras sąlygas. Vienmačių a.d. atveju būtinos ir pakankamos sąlygos gautos [3] darbe. Daugiamačių a.d. atveju ši problema dar neišspręsta, tačiau galima pateikti nemažai pavyzdžių, kuomet iš konvergavimo integralinėje maksimumų teoremoje išplaukia konvergavimas lokalinėje maksimumų teoremoje.

Šiame straipsnyje tirsime konvergavimo greitį (2) lygybėje. Gautas netolygusis konvergavimo greičio įvertis apibendrina [1] darbe gautą rezultatą.

Pažymėkime

$$u_n(x) = n\big(1 - F(a_n+b_nx)\big),$$
$$v_n(x) = u_n(x) + \ln H(x),$$

tiems x, su kuriais $H(x) > 0$,

$$h_n(x) = (n+2)b_{1,n}b_{2,n}$$
$$+\left((n+1)\frac{\partial F(a_n+b_nx)}{\partial x_1}\frac{\partial F(a_n+b_nx)}{\partial x_2} + F(a_n+b_nx)p(a_n+b_nx)\right),$$

$$h(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

TEOREMA. *Tarkime, tenkinamos* (1) *ir* (2) *sąlygos. Visiems x, su kuriais $u_n(x)/n \leqslant 1/2$ ir $H(x) > 0$, teisingas konvergavimo greičio įvertis*

$$\left|p_n(x) - \frac{\partial^2 H(x)}{\partial x_1 \partial x_2}\right| \leqslant h_n(x)\Delta_n(x) + R_n(x).$$

Čia

$$\Delta_n(x) = H(x)\big(r_{1,n}(x) + r_{2,n}(x) + r_{1,n}(x)r_{2,n}(x)\big),$$
$$r_{1,n}(x) = \frac{2u_n^2(x)}{n} + \frac{2u_n^4(x)}{n^2} \times \frac{1}{1-q},$$
$$r_{2,n}(x) = \big|v_n(x)\big| + \frac{v_n^2(x)}{2} \times \frac{1}{1-s},$$

o $0 < q, s < 1$ parenkami taip, kad

$$\frac{2u_n^2(x)}{3n} \leqslant q, \qquad \frac{|v_n(x)|}{3} \leqslant s;$$

$$R_n(x) = H(x)\big|h_n(x) - h(x)\big|.$$

Pastaba. Dydis $\Delta_n(x)$ yra netolygusis konvergavimo greičio įvertis (1) lygybėje (žr. [2]). Pastebėsime, kad $R_n(x) \to 0$, kai $n \to \infty$, kadangi iš (2) išplaukia, kad $h_n(x) \to h(x)$, kai $n \to \infty$. Tačiau dydžio $R_n(x)$ nykimas priklauso ne tik nuo n, bet ir nuo pačio skirstinio F bei centravimo ir normavimo vektorių a_n ir b_n.

Įrodymas. Turime

$$\begin{aligned} &\left|p_n(x) - \frac{\partial^2 H(x)}{\partial x_1 \partial x_2}\right| \\ &\quad \leqslant \left|p_n(x) - h_n(x)e^{-u_n(x)}\right| + \left|h_n(x)e^{-u_n(x)} - H(x)h(x)\right|. \end{aligned} \tag{3}$$

Įvertinsime pirmąjį nelygybės (3) dešiniosios pusės dėmenį. Turime

$$\left|p_n(x) - h_n(x)e^{-u_n(x)}\right| = h_n(x)\left|F^n(a_n + b_n x) - e^{-u_n(x)}\right|.$$

Pasinaudoję nelygybe

$$e^{-nt} - (1-t)^n\left(e^{2nt^2} - 1\right) \leqslant (1-t)^n \leqslant e^{-nt} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1/2),$$

gauname

$$\left|F^n\left(a_n + b_n x\right) - e^{-u_n(x)}\right| \leqslant e^{-u_n(x)}\left(\exp\left\{\frac{2u_n^2(x)}{n}\right\} - 1\right),$$

jei $u_n(x)/n \leqslant 1/2$. Iš čia, taikydami nelygybę

$$|e^t - 1| \leqslant |t| + \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{1-q} \quad \left(\frac{|t|}{3} \leqslant q - 1\right),$$

gauname

$$\left|p_n(x) - h_n(x)e^{-u_n(x)}\right| \leqslant h_n(x)e^{-u_n(x)} r_{1,n}(x), \tag{5}$$

jei $u_n(x)/n \leqslant 1/2$, o $q < 1$ parinktas taip , kad $(2u_n^2(x))/(3n) \leqslant q$.

Dabar įvertinsime antrąjį nelygybės (3) dešiniosios pusės dėmenį. Pasinaudoję nelygybe

$$ab - cd = a(b-c) + c(a-d),$$

gauname

$$\begin{aligned} &\left|h_n(x)e^{-u_n(x)} - H(x)h(x)\right| \\ &\quad \leqslant h_n(x)\left|e^{-u_n(x)} - H(x)\right| + H(x)\left|h_n(x) - h(x)\right|. \end{aligned}$$

Vėl taikydami nelygybę (4), gauname

$$\left|e^{-u_n(x)} - H(x)\right| = H(x)\left|e^{-v_n(x)} - 1\right| \leqslant H(x) r_{2,n}(x),$$

jei $|v_n(x)|/3 \leqslant s < 1$. Iš čia išplaukia, kad

$$\left|h_n(x)e^{-u_n(x)} - H(x)h(x)\right| \leqslant h_n(x)H(x)r_{2,n}(x) + R_n(x). \tag{6}$$

Kadangi

$$e^{-u_n(x)} \leqslant \left|e^{-u_n(x)} - H(x)\right| + H(x),$$

tai, atsižvelgę į nelygybes (5) ir (6), iš nelygybės (3) gauname konvergavimo greičio įvertį.

Teorema įrodyta.

Pavyzdys. Sakykime, kad

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + e^{-x_1} + e^{-x_2}}, \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R}.$$

Parinkę centravimo ir normavimo vektorius $a_n = (\ln n, \ln n)$, $b_n = (1, 1)$, gauname

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n - a_n < x) = e^{-e^{-x_1} - e^{-x_2}},$$
$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = e^{-x_1 - x_2} e^{-e^{-x_1} - e^{-x_2}}, \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R}.$$

Kaip matome, tenkinamos (1) ir (2) sąlygos. Gausime pagrindinius dydžius, įeinančius į konvergavimo greičio įverčio išraišką. Turime

$$u_n(x) = \frac{e^{-x_1} + e^{-x_2}}{1 + e^{-x_1}/n + e^{-x_2}/n},$$
$$v_n(x) = -\frac{(e^{-x_1} + e^{-x_2})^2}{n + e^{-x_1} + e^{-x_2}},$$
$$h_n(x) = \frac{1 + 3/n + 4/n^2}{(1 + e^{x_1}/n + e^{-x_2/n})^4} e^{-x_1 - x_2},$$
$$h(x) = e^{-x_1 - x_2},$$
$$R_n(x) = \left(\frac{1 + 3/n + 4/n^2}{(1 + e^{-x_1}/n + e^{-x_2}/n)^4}\right) e^{-x_1 - x_2} e^{-e^{-x_1} - e^{-x_2}}.$$

LITERATŪRA

[1] А. Аксомайтис, А. Йокимайтис, Скорость сходимости для плотности распределения максимума независимых случайных величин, *Liet. Mat. Rink.*, **37** (1997), 133–138.

[2] A. Jokimaitis, Die Konvergenzgeschwindigkeit der Verteilung des Maximums der Zufallsvektoren. *Liet. Mat. Rink.*, **32** (1992), 229–236.

[3] T. J. Sweeting, On domains of uniform local attraction in extreme value theory, *Ann. Probab.*, 13 (1985), 196–205.

The estimate of convergence rate of the density of maximum of multivariate random variables

A. Jokimaitis

In this paper the asymptotic of the density of the maximum of the independent identically distributed multivariate random variables is investigated. The nonuniform estimate od the convergence rate is obtained.