LMD konf. darbai, 129–133
1997, Vilnius

Tradicinių uždavinių sprendimas netradiciniais metodais

P. Grebeničenkaitė (Šiaulių m. Salduvės vid. m-la)

Yra daug tradicinių uždavinių, kuriuos galima spręsti netradiciniais metodais. Netradiciniai metodai moko mokinius logiškai mąstyti, analizuoti, nepasitenkinti šablonu.

Netradiciniai metodai taikomi mintinam skaičiavimui. Pvz.,

$$428 \cdot 75 = 107 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 3 = 321 \cdot 100 = 32100$$

$$49^2 = (50-1)^2 = 2500 - 100 + 1 = 2401$$

$$\sqrt{63 \cdot 175} = \sqrt{9 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 25} = 3 \cdot 7 \cdot 5 = 105.$$

Netradicinius metodus galima taikyti ir kai kurioms kvadratinėms lygtims. Pvz., $x + \frac{1}{x} = 3\frac{1}{3}$. Šios lygties šaknys $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$ akivaizdžios.

Sprendžiant lygtį $x + \frac{1}{x+3} = 2\frac{1}{5}$, reikia prie abiejų jos pusių pridėti po 3. Gauname $x + 3 = 5$ arba $x + 3 = \frac{1}{5}$, t.y. $x_1 = 2$, $x_2 = -2\frac{4}{5}$.

Sprendžiant iracionalines lygtis, pirmiausia keliamos abi lygties pusės laipsniu net tada, kai to nereikia, ypač tais atvejais, kai lygtis neturi sprendinių arba turi tik vieną sprendinį.

Pvz., lygties $\sqrt{3-2x} + \sqrt{x-2} = 1$ antroji šaknis turi prasmę, kai $x \geqslant 2$, o pirmoji šaknis su šiomis kintamojo x reikšmėmis neturi prasmės. Vadinasi, lygtis neapibrėžta su visomis realiosiomis x reikšmėmis.

Lygtis $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x-3} = 5$ apibrėžta su kintamojo reikšme $x \geqslant 3$. Nesunku pastebėti, kad su nurodyta x reikšme kairioji lygties pusė didesnė už 5.

Lygtis $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x-4}$ apibrėžta su reikšme $x \geqslant 4$. Su šia kintamojo x reikšme kairioji lygties pusė neigiama, o dešinioji neneigiama.

Kai kurių lygčių ir nelygybių netradicinis sprendimas grindžiamas savybe: monotoninė funkcija kiekvieną savo reikšmę įgyja tik vieną kartą.

Pvz., lygtis $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+5} = 4$.

Funkcija $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{2x+5}$ didėjanti visoje savo apibrėžimo srityje $[1; +\infty]$, nes yra dviejų didėjančių funkcijų suma. Aišku, funkcija $f(x)$ reikšmę 4 gali įgyti tik vieną kartą, kai $x = 2$. Vadinasi, duotoji lygtis turi vienintelį sprendinį $x = 2$.

Šis metodas taikomas ir sprendžiant lygtį $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 5 - 2x$. Perrašome ją taip: $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} + 2x = 5$. Akivaizdu, kad $x = 1$.

Šis metodas taikomas ir sprendžiant rodiklines lygtis.

Pvz., lygtis $2^x + 4^x = 20$ turi vienintelį sprendinį $x = 2$. Ją galima spręsti ir tradiciniu metodu, suvedant į kvadratinę lygtį. Lygtis $2^x + 3^x = 13$ taip pat turi vienintelį sprendinį $x = 2$.

Netradiciškai galima surasti funkcijos mažiausią ir didžiausią reikšmes, t.y. jos reikšmių sritį. Reikia argumentą išreikšti per funkciją ir nustatyti gautosios funkcijos egzistavimo sritį.

Nagrinėsime pavyzdžius, kur reikia spręsti kvadratines nelygybes ir nebraižyti funkcijų grafikų.

Kvadratinio trinario $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ reikšmių sritis surandama taip: išreiškiame x per y ir gauname $ax^2 + bx + c - y = 0$;

Kad gautoji lygtis turėtų realius sprendinius, jos diskriminantas turi būti neneigiamas:

$$D = b^2 - 4a(c - y) \geqslant 0.$$

Iš gautos nelygybės gauname y reikšmių sritį.

Kai $a < 0$, tai $y \leqslant \frac{4ac-b^2}{4a}$; kai $a > 0$, tai $y \geqslant \frac{4ac-b^2}{4a}$.

Aišku, $y = \frac{4ac-b^2}{4a}$ yra trinario didžiausioji reikšmė, kai $a < 0$ ir mažiausioji, kai $a > 0$.

Funkcijos pavidalo $y = \frac{A}{ax^2+bx+c}$, $b^2 - 4ac < 0$, $A \neq 0$ y reikšmių sritis iš sąlygos $(b^2 - 4ac)y^2 + 4aAy \geqslant 0$, $y \neq 0$.

Spręsdami nelygybę randame, kad kai $aA > 0$, tai $0 < y \leqslant \frac{4aA}{4ac-b^2}$ ir kai $aA < 0$, tai $\frac{4aA}{4ac-b^2} \leqslant y < 0$. Aišku, $y = \frac{4aA}{4ac-b^2}$ – didžiausioji reikšmė, kai $aA > 0$ ir mažiausioji reikšmė, kai $aA < 0$.

Pvz., raskite funkcijos $y = \frac{x^2-3x-1}{x^2+1}$ reikšmių sritį.

Išreiškiame x per y ir gauname

$$(y - 1)x^2 - 3x + y - 1 = 0;$$

y reikšmių sritį randame iš nelygybės:

$$\begin{aligned}
&9 - 4(y-1)^2 \geqslant 0,\\
&(y-1)^2 \leqslant \frac{9}{4},\\
&-\frac{3}{2} \leqslant y - 1 \leqslant \frac{3}{2},\\
&0{,}5 \leqslant y \leqslant 2.
\end{aligned}$$

Tad $y \in [-1{,}5;\ 2]$. Intervalo galuose yra duotosios funkcijos mažiausioji ir didžiausioji reikšmės.

Šiuo netradiciniu metodu randamos visų funkcijų tipo

$$y = \frac{a_1 f^2(t) + b_1 f(t) + c_1}{a_2 f^2(t) + b_2 f(t) + c_2}$$

reikšmių sritys, kai funkcijos *f(t)* reikšmių sritis duota arba nesunku ją surasti.

Pvz. Raskite funkcijos $y = -\cos^2 x - 5\sin x + 7$ reikšmių sritį.

Pertvarkome duotąją funkciją:

$$y = -1 + \sin^2 x - 5\sin x + 7 = \sin^2 x - 5\sin x + 6.$$

Išreiškiame $\sin x$ per y:

$$\sin^2 x - 5\sin x - (y-6) = 0,$$

$$\sin x = \frac{5 + \sqrt{25 + 4y - 24}}{2} \quad \text{arba} \quad \sin x = \frac{5 - \sqrt{25 + 4y - 24}}{2},$$

$$\sin x = \frac{5 + \sqrt{1 + 4y}}{2} \quad \text{arba} \quad \sin x = \frac{5 - \sqrt{1 + 4y}}{2}.$$

y reikšmių sritį randame iš nelygybių sistemų:

$$\begin{cases} 1 + 4y \geqslant 0, \\ -1 \leqslant \dfrac{5 + \sqrt{1+4y}}{2} \leqslant 1; \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} 1 + 4y \geqslant 0, \\ -1 \leqslant \dfrac{5 - \sqrt{1+4y}}{2} \leqslant 1. \end{cases}$$

Pirmoji sistema neturi sprendinių. Sprendžiame antrąją sistemą:

$$\begin{cases} y \geqslant -\dfrac{1}{4}, \\ -7 \leqslant -\sqrt{1+4y} \leqslant -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geqslant -\dfrac{1}{4}, \\ 3 \leqslant \sqrt{1+4y} \leqslant 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geqslant -\dfrac{1}{4}, \\ 9 \leqslant 1 + 4y \leqslant 49; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geqslant -\dfrac{1}{4}, \\ 2 \leqslant y \leqslant 12. \end{cases}$$

Vadinasi duotosios funkcijos reikšmių sritis yra [2; 12].

Šis netradicinis metodas supažindina mokinius su atvirkštinėmis funkcijomis, stiprina nelygybių sprendimo įgūdžius.

Galime netradiciškai įrodinėti tapatybes, atlikinėti tapačius pertvarkymus, panaudojant funkcijos pastovumo požymį: jei $F'(x) = 0$ intervale I, tai funkcija $F(x)$ pastovi šiame intervale. Šį požymį galime formuluoti taip: jei dvi funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ turi lygias išvestines kiekviename intervalo I taške, tai funkcijų skirtumas tame intervale yra pastovus dydis, t.y. $f(x) - g(x) = c$.

Kad įrodytume tapatybę $f(x) = g(x)$ intervale $[a; b]$, pakanka patikrinti, kad:

a) funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ netrūkios intervale $[a; b]$;
b) išvestinės $f'(x)$ ir $g'(x)$ netrūkios intervale $(a; b)$;
c) funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ reikšmės lygios nors viename taške x_0 iš intervalo $(a; b)$.
Pvz., 1. Įrodykite tapatybę

$$\cos^4 x - \frac{1}{8}\cos 4x = 2\cos^2 x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{5}{8}.$$

Nagrinėjame funkcijas

$$f(x) = \cos^4 x - \frac{1}{8}\cos 4x \quad \text{ir} \quad g(x) = 2\cos^2 x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{5}{8},$$

kurios netrūkios realiųjų skaičių aibėje.
Turime:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4\cos^2 x \sin 2x + \sin x + \frac{1}{2}\sin 4x = -2\cos^2 x \sin 2x + \sin 2x \cos 2x \\ &= -\sin 2x - \cos 2x \sin 2x + \sin 2x \cos 2x = -2\sin 2x + \sin 2x = -\sin 2x. \end{aligned}$$

Kadangi $f'(x) = g'(x)$, tai $f(x) - g(x) = c$. Randame c, paėmę $x = 0$: $f(0) - g(0) = 0$. Taigi, realiųjų skaičių aibėje $f(x) = g(x)$, t.y.

$$\cos^4 x - \frac{1}{8}\cos 4x = 2\cos^2 x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{5}{8}.$$

2. Su kuriomis parametrų a ir b reikšmėmis funkcijos

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{x^2 + bx + a}$$

reikšmės nepriklauso nuo argumento x reikšmių?
Randame

$$\begin{aligned} &f'(x) \\ &= \frac{(2ax + b)(x^2 + bx + a) - (ax^2 + bx + 1)(2x + b)}{(x^2 + bx + a)^2} \\ &= \frac{2ax^3 + 2abx^2 + 2a^2x + bx^2 + b^2x + ab - 2ax^3 - 2bx^2 - 2x - abx^2 - b^2x - b}{(x^2 + bx + a)^2} \\ &= \frac{b(a-1)x^2 + 2(a^2-1)x + b(a-1)}{(x^2 + bx + a)^2}. \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$, kai $b(a-1)x^2 + 2(a^2-1)x + b(a-1) = 0$ ir $x^2 + bx + a \neq 0$. Aišku, funkcijos reikšmės nepriklauso nuo argumento x reikšmių, kai $a = 1$ ir b – bet kuris realusis skaičius arba kai $a = -1$ ir $b = 0$, nes su šiomis parametrų a ir b

reikšmėmis $f'(x)$ tapačiai lygi nuliui visoje funkcijos $f(x)$ apibrėžimo srityje. Šiuo metodu galima įrodinėti formules, išreiškiančias logaritmų savybes.

Pvz. 1. $\log_a x^k = k\log_a x$.

Funkcijos $f(x) = \log_a x^k$ ir $g(x) = k\log_a x$ netrūkios intervale $(0; +\infty)$.

Gauname

$$f'(x) = (\log_a x^k)' = \frac{kx^{k-1}}{x^k \ln a} = \frac{k}{x\ln a}; \qquad g'(x) = (k\log_a x)' = \frac{k}{x\ln a}.$$

Kai $x = 1$, tai $f(1) = g(1) = 0$, aišku, nagrinėjamų funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ reikšmės intervale $(0; +\infty)$ lygios, t.y. $\log_a x^k = k\log_a x$.

Įrodyme duotuosius reiškinius laikėme funkcijomis nuo x, o likusius kintamuosius a ir k – parametrais.

2. $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$.

Funkcijos $f(a) = \log_c(ab)$ ir $g(a) = \log_c a + \log_c b$ yra netrūkios intervale $(0; +\infty)$. Kintamuosius b ir c laikome parametrais. Randame $f'(a)$ ir $g'(a)$:

$$f'(a) = \frac{b}{ab\ln c} = \frac{1}{a\ln c} \quad \text{ir} \quad g'(a) = (\log_c a + \log_c b)' = \frac{1}{a\ln c}.$$

Kai $a = 1$, tai $f(1) = g(1) = \log_c b$. Aišku, $f(a) = g(a)$ intervale $(0; +\infty)$, t.y. $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$.

Išspręsti pavyzdžiai rodo, kad išvestinės taikymas tapačiuose pertvarkiuose palengvina uždavinio sprendimą. Vienok, tai nereiškia, kad tradiciniai sprendimo būdai blogesni. Mokiniai turi patys pasirinkti, kokius sprendimo metodus taikyti.

LITERATŪRA

[1] "Kvant", 1993 m.

[2] "Matematika v škole", 1991 m.

Non-traditional methods in solving traditional problems

P. Grebeničenkaitė

The author introduces easier ways in solving problems with the help of non-traditional methods.