LMD konf. darbai, 125–128
1997, Vilnius

Pastabos apie vienetinės funkcijos panaudojimą sąsukoms skaičiuoti

G. Dosinas

Skaičiuojant sąsukas sudėtingesniais atvejais, dažnai kyla sunkumų nustatant rėžius. Atsisakydami čia gilesnio teorinio pagrindimo, pateiksime gana formalizuotą būdą sąsukoms skaičiuoti, pasitelkdami vienetinę funkciją. Šią metodiką studentai lengvai perpranta ir gana sėkmingai ja naudojasi, nes pakankamai akivaizdus skaičiavimo algoritmas.

Aišku, kad absoliučiai tolydaus atsitiktinio dydžio ξ atveju, kurio tankis $p_\xi(x)$, teisingos lygybės, skaičiuojant įvykio tikimybes P:

$$P(a < \xi < b) = P(a \leqslant \xi < b) = P(a < \xi \leqslant b) = P(a \leqslant \xi \leqslant b) = \int_a^b p_\xi(x)\,dx.$$

Tarkime, kad $p_\xi(x) < +\infty$, kai $x \in \mathbf{R}$. Pasinaudoję vienetine Hevisaido funkcija

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

gausime

$$P(a < \xi < b) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s-a)p_\xi(x)h(b-s)\,ds = h(b-a)\int_a^b p_\xi(x)\,dx.$$

Čia daugiklis $h(b-a)$ įvertina reikalavimą $b \geqslant a$ (priešingu atveju $P(a < \xi < b)$), svarbų formaliame skaičiavime.

Iš čia išplaukia, kad reikia mokėti užrašyti atitinkamo atsitiktinio dydžio ξ tankio funkciją, naudojant vienetinę funkciją; toliau belieka techniški skaičiavimai. Beje, dažnai praverčia lygybė

$$\int_a^{+\infty} h(x-b-s)f(x,s)\,ds = h(x-b-a)\int_a^{x-b} f(x,s)\,ds;$$

čia $f(x,s)$ – tolydi funkcija (arba integruojama Rymano prasme).

Pateiksime keletą pavyzdžių, iliustruodami metodą.

Pavyzdys 1. Tarkime, reikia surasti dviejų tolygiai pasiskirsčiusių nepriklausomų atsitiktinių dydžių ξ ir η sąsuką: $T[-1,1)*T[-1,1)$. Atsitiktinio dydžio $\xi \sim T[-1,1)$ tankį užrašome $p_\xi(x)=\frac{1}{2}(h(x+1)-h(x-1))$. Analogiškai $\eta \sim T[-1,1)$.
Tuomet sąsuką skaičiuojame, naudodami žinomą formulę, t.y.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x-s)p_\eta(s)\,ds:$$

$$\begin{aligned}
p_{\xi+\eta}(x) &= p_\xi(x)*p_\eta(x)\\
&= \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\big(h(x-s+1)-h(x-s-1)\big)\big(h(s+1)-h(s-1)\big)\,ds\\
&= \frac{1}{4}\left(\begin{aligned}&\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(x-s+1)h(s+1)\,ds-\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(x-s+1)h(s-1)\,ds-\\ &-\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x-s-1)h(s+1)\,ds+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(x-s-1)h(s-1)\,ds\end{aligned}\right)\\
&= \frac{1}{4}\Bigg(\int_{-1}^{+\infty} h(x-s+1)\,ds-\int\limits_{1}^{+\infty} h(x-s+1)\,ds\\
&\qquad -\int\limits_{-1}^{+\infty} h(x-s-1)\,ds+\int\limits_{1}^{+\infty} h(x-s-1)\,ds\Bigg)\\
&= \frac{1}{4}h(x+2)\int\limits_{-1}^{x+1} ds-\frac{1}{4}h(x)\int\limits_{1}^{x+1} ds-\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{x-1} ds-\frac{1}{4}h(x-2)\int\limits_{1}^{x-1} ds\\
&= \frac{1}{4}(x+2)h(x+2)-\frac{1}{2}xh(x)+\frac{1}{4}(x-2)h(x-2).
\end{aligned}$$

Užrašius $p_{\xi+\eta}(x)=p_\xi(x)*p_\eta(x)$ „įprastiniu" būdu, turime

$$p_{\xi+\eta}=\begin{cases}0, & x\leqslant 2,\\ \frac{1}{4}(x+2), & -2\leqslant x<0,\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}x, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

Pavyzdys 2. Sakysime, kad dvimatis atsitiktinis dydis (ξ,η) tolygiai pasiskirstęs vienetiniame skritulyje, t.y.

$$(\xi,\eta)\sim p_{\xi,\eta}(x,y)=\frac{1}{\pi}\big(1-x^2-y^2\big).$$

Tuomet

$$p_{\xi+\eta}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{\xi,\eta}(z-s,s)\,ds=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h\big(1-(z-s)^2-s^2\big)\,ds$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{(z+\sqrt{2-z^2})/2}^{(z+\sqrt{2-z^2})/2}ds=\frac{1}{\pi}\sqrt{2-z^2}\big(h(z+\sqrt{2})-h(z-\sqrt{2})\big)$$

arba $p_{\xi+\eta}(z)=\frac{1}{\pi}\sqrt{2-z^2}$, kai $-\sqrt{2}\leqslant z<\sqrt{2}$ ir nulis – kitur.

Akivaizdus formalaus skaičiavimo privalumas.

Pavyzdys 3. Tarkime, atsitiktinio dydžio ξ tankis apibrėžiamas taip

$$p_\xi(x)=\frac{1}{2}\big(h(x)-h(x-1)\big)+\frac{1}{4}\big(h(x-1)-h(x-2)\big)+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}^{+\infty}2^{k+1}\big(h(x-k)-h(x-k-1)\big).$$

Analogiškai apibrėžkime atsitiktinio dydžio η tankį $p_\eta(x)$ ir tarkime, kad ξ ir η nepriklausomi. Tada

$$p_\xi(x)*p_\eta(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_\xi(x-s)p_\eta(s)\,ds$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\big(h(x-s-k)-h(x-s-1-k)\big)$$
$$\times\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{l+1}}\big(h(s-l)-h(s-l-1)\big)\,ds$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k,l=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+l+2}}\big(h(x-k-s)-h(x-1-k-s)\big)\big(h(s-l)-h(s-l-1)\big)\,ds$$

$$=\sum_{k,l=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+l+1}}$$
$$\times\left(\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}h(x-k-s)h(s-l)\,ds-\int_{-\infty}^{+\infty}h(x-k-s)h(s-l-1)\,ds-\\ \displaystyle-\int_{-\infty}^{+\infty}h(x-s-1-k)h(s-l)\,ds+\int_{-\infty}^{+\infty}h(x-1-k-s)h(s-l-1)\,ds\end{array}\right)$$

Atlikę integravimą, galutinai gauname sąsukos rezultatą

$$p_{\xi+\eta}(x) = \frac{x}{4}h(x) - \frac{1}{4}(x-1)h(x-1) + \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{j-3}{2^{j+2}}(x-j)h(x-j).$$

Skyrium imant, pastebėsime, kad tokį formalųjį skaičiavimo metodą galime panaudoti, sudarant ir pasiskirstymo funkciją $F_\xi(x)$; apskritai formalizuoti skaičiavimus tiek diskretaus, tiek absoliučiai tolydaus atsitiktinio dydžio atvejais. Tam tikslui tektų įvesti ir kitokį vienetinės funkcijos apibrėžimą, bei nusakyti jos diferencijavimo operaciją.

Remarks on applying unit function for calculation of convolutions

G. Dosinas (KTU)

The examples of calculations of convolutions using the unit function are given.