LMD konf. darbai, 110–114
1997, Vilnius

Les mouvements dans l'espace des éléments linéaires à connexion linéaire

A. P. Urbonas (VPU)

La notion de la connexion linéaire est mentionnée dans les travaux de E. Cartan. Plus tard, nous la trouvons chez B. Laptev [2]. Remarquons qu'en cas général la connexion linéaire ne permet pas de construire une différentiation invariante. La connexion linéaire dans les espaces des éléments d'appui à été introduite et étudiée dans [1] par V. Bliznikas. Ici, on a introduit en même temps deux connexions – linéaire et affine. Tout de même V.Bliznikas a étudié plus largement la connexion affine génerale et la théorie de courvature est construite à l'aide de cette connexion.

Nous avons trouvé qu'il y a au moins deux cas – l'espace des éléments hiperplaniques [3] et l'espace des éléments linéaires – quand il est possible d'introduire une seule connexion linéaire et de construire la diférentiation covariante. Sur cette base nous formons la théorie de courvature. Cela nous permettra d'étudier les mouvements dans les espaces des éléments linéaires et de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'espace admette le groupe de mouvements ayant r de paramètres. En s'appuyant sur cette base nous pouvons étudier les mouvements de l'espace plus profondément, par exemple, déterminer la mobilité maximale, les lacunes ect.

1. ESPACE L_n DES ELEMENTS LINEAIRES

Soit V_n une variété différentielle de la dimension n (un espace de base). A chaque point (x^i) de V_n nous pouvons associer un vecteur (l^k) (objet d'appui). Un élément $(x^i,\ l^k)$est appelé élément d'appui. Désignons l'ensemble des éléments d'appui par L_n et appelons – le espace des éléments linéaires. Les transformations admissibles des coordonnées dans L_n sont:

$$\begin{cases} \bar{x}^i = f^i(x^k)(x^k = g^k(\bar{x}^i)), \\ \bar{l}^k = f^k_s l^s. \end{cases} \tag{1}$$

Ici et dans la suite nous posons:

$$f^i_k = \frac{\partial f^i(x^p)}{\partial x^k}, \qquad f^i_{kl} = \frac{\partial^2 f^i(x^p)}{\partial x^k \partial x^l}, \ldots$$
$$g^i_k = \frac{\partial g^i(\bar{x}^p)}{\partial \bar{x}^k}, \qquad g^i_{kl} = \frac{\partial^2 g^i(\bar{x}^p)}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^l}, \ldots$$

Tous les indices prennent les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$.

L'espace cotengent vectoriel T au point (x^i, l^k) de l'espace L_n a le répére naturel $\{dx^i, dl^k\}$.

THÉORÈME. *Soit $\Gamma^i_j(x,l)$ un objet différentiel- géométrique dans l'espace L_n:*

$$\bar{\Gamma}^i_k(\bar{x},\bar{l}) = f^i_j g^l_k \Gamma^j_l(x,l) - f^i_{j s} g^j_k l^s. \tag{2}$$

Ainsi, il existe dans l'espace T une forme

$$\Theta^i = dl^i + \Gamma^i_k dx^k \quad \text{telle que} \quad \bar{\Theta}^i = f^i_k \Theta^k.$$

L'affirmation réciproque est aussi vraie. La démonstration ne présente pas de difficulté. L'objet $\Gamma^i_j(x,l)$ est dit objet de la connexion linéaire. En ce cas l'espace L_n est nommé l'espace à connexion linéaire.

Considérons une fonction scalaire $f(x,l)$ en L_n. Le differentiel de $f(x,l)$ s'exprime:

$$df(x,l) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^k} - \frac{\partial f}{\partial l^s}\Gamma^s_k\right)dx^k + \frac{\partial f}{\partial l^s}\Theta^s.$$

Les expressions $\frac{\partial f}{\partial x^k} - \frac{\partial f}{\partial l^s}\Gamma^s_k$ et $\frac{\partial f}{\partial l^s}$ sont appellées les dérivées de Pfaff de la premiére et de la deuxième sorte. Désignons – les de facon suivante:

$$\partial^\Gamma_k = \partial_k - \frac{\partial}{\partial l^s}\Gamma^s_k, \qquad {}_{\cdot k} = \frac{\partial}{\partial l^k}.$$

Nous voyons que la dérivée de deuxième sorte coïncide avec la dérivée partielle par rapport à l'objet d'appui. Il en résulte, que ces dérivées de deuxième ordre sont symétriques.

En alternant les dérivées de la première sorte (deuxième ordre) nous trouvons:

$$\begin{aligned} 2\partial^\Gamma_{[k}\partial^\Gamma_{j]} f &= f_{\cdot i} R^i_{jk}, \\ R^i_{jk} &= 2(\partial_{[j}\Gamma^i_{k]} + \Gamma^i_{[j|s|}\Gamma^s_{k]}). \end{aligned} \tag{3}$$

Le tenseur R^i_{jk} est appelé tenseur de courvature de la connexion linéaire.

THÉORÈME. *L'objet*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial \Gamma^i_j}{\partial l^k} \tag{4}$$

fait l'objet de connexion affine dans L_n.

Nous ommetrons la démonstration qui est facile.

Maintenant nous pouvons définir les dérivées covariantes des champs tensoriels. Par exemple, nous définissons la dérivée covariante par rapport à x^k pour le champ $h^i_l(x,l)$ de la manière suivante:

$$\nabla_k h^i_l = \partial_k h^i_l - h^i_{l\cdot p}\Gamma^p_k + h^p_l\Gamma^i_{kp} - h^i_p\Gamma^p_{kl}.$$

La dérivée covariante par rapport à l^k coïncide avec la dérivée partielle par rapport à l^k.

En alternant les dérivées covariantes de deuxième ordre, nous trouvons

$$2\nabla_{[k}\nabla_{j]}h^i_l = h^i_s R^2_{ljk} - h^i_l R^s_{sjk} + h^i_{lp} R^p_{jk} + 2\nabla_s h^i_l \Omega^s_{jk}, \tag{5}$$

où

$$R^i_{ljk} = 2\left(\partial_{[j}\Gamma^i_{k]l} + \Gamma^i_{[j|l\cdot s|}\Gamma^s_{k]} + \Gamma^i_{[j|s|}\Gamma^s_{k]l}\right), \tag{6}$$

$$\Omega^i_{jk} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}) \tag{7}$$

R^i_{ljk} est appelé tenseur de courvature de la connexion affine; Ω^i_{jk} – tenseur de torsion.

Les fonctions $\Gamma^i_j(x, l)$ sont homogènes d'ordre 1 par rapport aux variables du deuxième groupe. Donc, $\Gamma^i_{jk} l^k = \Gamma^i_j$ (cela découle de (4)). Remarquons qu'il existe la relation entre les tenseurs de courvature R^i_{jk} et R^i_{ljk} suivante:

$$R^i_{jk\cdot l} = R^i_{ljk}. \tag{8}$$

L'egalité (8) nous montre que le tenseur de courvature R^i_{jk} joue le role principale dans la théorie de l'espace L_n.

Pour les recherches, qui vont suivre, exigerons d'une identité de Ricci, à savoir:

$$\nabla_j R^i_{kl} + \nabla_l R^i_{jk} + \nabla_k R^i_{lj} = 2R^i_{jp}\Omega^p_{kl} + 2R^i_{lp}\Omega^p_{jk} + 2R^i_{kp}\Omega^p_{lj}. \tag{9}$$

2. MOUVEMENTS DANS L'ESPACE L_n

On dit, qu'une transformation infinitésimale de base $\bar{x}^i = x^i + v^i(x)\delta t$ est un mouvement de L_n à connexion linéaire si et seulement si $v^i(x)$ sont les solutions des équations différentielles aux dérivées partielles

$$\underset{v}{L}\,\Gamma^i_j = 0, \tag{10}$$

où $\underset{v}{L}$ – symbole de la dérivée de Lie par rapport au vecteur v^i(x).

Le système (10) peut être mis sous la forme explicite:

$$\underset{v}{L}\,\Gamma^i_j \equiv v^s\partial_s\Gamma^i_j - \partial_s v^i \Gamma^s_j + \partial_j v^s \Gamma^i_s + \Gamma^i_{j\cdot s}\partial_p v^s l^p + \partial_{js} v^i l^s = 0. \tag{11}$$

En remplacant dans le dernier système les dérivées partielles par les dérivées covariantes nous avons:

$$\underset{v}{L}\,\Gamma^i_j = v^s R^i_{sj} + 2v^s\nabla_j\Omega^i_{sp}l^p + 2\nabla_j v^s\Omega^i_{sp}l^p + \nabla_j\nabla_s v^i l^s = 0. \tag{12}$$

Cette forme est commode pour la différentiation covariante, parce que tous les membres sont tenseurs.

Dérivons le système (12) de manière covariante par rapport à x^k et alternons les indices k et j:

$$2\nabla_{[k}\underset{v}{L}\Gamma^i_{j]} = \nabla_k v^s R^i_{sj} - \nabla_j v^s R^i_{sk} + 4\nabla_{[k} v^s \nabla_{j]}\Omega^i_{sp} l^p + 2v^s \nabla_{[k} R^i_{|s|j]} + 4v^s \nabla_{[k}\nabla_{j]}\Omega^i_{sp} l^p$$
$$+ 4\nabla_{[k}\nabla_{j]} v^s \Omega^i_{sp} l^p + 4\nabla_{[j} v^s \nabla_{k]}\Omega^i_{sp} l^p + 2\nabla_{[k}\nabla_{j]}\nabla_s v^i l^s = 0.$$

En utilisant (9), (12) nous présentons dernier système sous la forme:

$$2\nabla_{[k}\underset{v}{L}\Gamma^i_{j]} = v^s\left(\nabla_s R^i_{kj} + 2R^i_{pj}\Omega^p_{sk} + 2R^i_{pk}\Omega^p_{js} + 2R^i_{ljk}\Omega^l_{ps} l^p + 2R^p_{jk}\Omega^i_{sp}\right)$$
$$- \nabla_p v^i R^p_{kj} + \nabla_j v^s R^i_{ks} + \nabla_k v^s R^i_{sj} + R^i_{kj\cdot s}\nabla_p v^s l^p = 0,$$

où bien, en termes de la dérivée de Lie,

$$\underset{v}{L} R^i_{kj} = 0. \tag{13}$$

Les calculs montrent que les différentiations de Lie et différentiations covariantes par rapport à l^k sont permutables pour les tenseurs et des objects Γ^i_j, Γ^i_{jk} si on a (10). Il en résulte:

$$\left(\underset{v}{L}\Gamma^i_j\right)_{\cdot k} = \underset{v}{L}\left(\Gamma^i_{j\cdot k}\right) = 0, \tag{14}$$

$$\left(\underset{v}{L}\Gamma^i_{jk}\right)_{\cdot l} = \underset{v}{L}\left(\Gamma^i_{jk\cdot l}\right) = 0. \tag{15}$$

En vertu de (14) et des propriétés de la dérivée de Lie nous déduisons:

$$\underset{v}{L}\Omega^i_{jk} = 0. \tag{16}$$

Posons

$$v^i_j = \nabla_j v^i \tag{17}$$

et considérons v^i, v^i_j en tant que $n^2 + n$ des fonctions inconnues dans les équations différentielles (12) et (17).

Les conditions d'intégrabilité de (12) (premiére série) sont les équations (13), (15) et (16).

Trouvons les conditions d'intégrabilité des équations (17). Dérivons ces équations de la maniére covariante par rapport à x^k et en déduisant le résultat de permutation j et k nous obtiendrons:

$$\left(\underset{v}{L}\Omega^i_{pj}\right)\Gamma^p_k + \left(\underset{v}{L}\Omega^i_{kp}\right)\Gamma^p_j + \left(\underset{v}{L}\Omega^p_{jk}\right)\Gamma^i_p + \underset{v}{L} R^i_{jk} = 0.$$

Cette égalité nous montre que les conditions d'intégrabilité de (17) sont incorporées à celles de (10).

Nous obtiendrons les autres séries d'intégrabilité de (10) en dérivant successivement par rapport à x^l et l^k de la manière covariante sous le signe de la dérivée de Lie les équations (13), (15) et (16).

En utilisant la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles et les proprietées de la dérivée de Lie on déduit que si les conditions des intégrabilitées de (10) contiennent q relations indépendantes, alors les solutions $v^i(x)$ contiennent $r = n^2 + n - q$ de paramètres. Ces solutions définissent le groupe des mouvements G_r.

En résumant le raisonnement précédent, nous pouvons formuler le theoreme.

THÉORÈME. *Les mouvements dans l'espace à connexion linéaire* Γ^i_j *sont déterminés par le système des équations différentielles* (10) *dont les conditions d'intégrabilité sont* (13), (15), (16) *et toutes les autres obtenues de celles-ci en dérivant jusqu' à la série l'ordre* N *par rapport à* x^l *et* l^k *de la manière covariante sous le signe de la dérivée de Lie. Si les équations d'intégrabilité contiennent* q *relations indépendantes et la série* $N + 1$ *ne fait pas augmenter le nombre* q, *alors l'espace* L_n *admet le groupe des mouvements* G_r, *où* $r = n^2 + n - q$.

REFERENCES

[1] V. Bliznikas, La théorie de courbure des espaces des éléments d'appuis, *Liet. Matem. Rink.*, **5** (1965), 9–24.

[2] B. Laptev, Le différentiel covariant et la théorie des invariants différentiels dans les espaces des éléments d'appuis tensoriels, *Izdatelstvo Kazanskogo Univ.*, **118** (4) (1958), 75–147.

[3] A. P. Urbonas, Les mouvements dans l'espace des éléments hyperplaniques à connexion linéaire, *Liet. Matem. Rink.*, **36** (4) (1996), 530–534.

Judesiai tiesinės sieties tiesinių elementų erdvėje

A. P. Urbonas

Tiriami tiesinių elementų erdvės su tiesine sietimi judesiai (automorfizmai). Įrodoma, kad šioje erdvėje tiesine sietis [1] yra fundamentalus objektas leidžiantis apibrėžti invariantinį diferencijavimą ir išvystyti visą kreivumo teoriją, įrodyti kreivumo objektus siejančias tapatybes. Naudojant Li ir kovariantinio diferencijavimo aparatą pavyko surasti būtinąsias bei pakankamąsias sąlygas, kad tiesinių elementų erdvė su tiesine sietimi turėtų judesių grupę G_r. Tikimės, kad remiantis šiuo darbu ateityje pavyks nustatyti minėtų erdvių maksimalų judrumą bei surasti lakunas judesių grupių eilėse.