LMD konf. darbai, 96–99
1997, Vilnius

Bervaldo sąryšis metrinėje hiperplokštuminių elementų erdvėje

I. Katinienė (VPU)

Tegu M_n-metrinė hiperplokštuminių elementų erdvė su duota metrika $g_{ij}(x^k, u_p)$ $(g_{ij} = g_{ji})$, invariantinė transformacijų

$$`u_i = \rho u_i (\rho > 0) \tag{1}$$

atžvilgiu. Tada

$$\begin{gathered}\nabla g_{ij} \equiv d g_{ij} - g_{kj}\omega_i^k - g_{ik}\omega_j^k = g_{ijk}\omega^k + g_{ij}^k\theta_k,\\ g_{ij}^k u_k = 0, \quad g_{ijk} \neq g_{ikj}, \quad g^{ijk} \neq g^{ikj},\\ g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k, \quad g_{ij}^k = -g_{pi}g_{qj}g^{pqk}, \quad g_{ijk} = -g_{pi}g_{qj}g_k^{pq}.\end{gathered} \tag{2}$$

Kartano tipo metrinį sąryšį $C\Gamma R(\Gamma_{jk}^{*i}, \Gamma_{ij}, C_j^{ik})$ su sukimosi tenzoriumi R_{jk}^i erdvėje M_n apibrėžiame pagalba sąryšio formų

$$\omega_j^{*i} = \omega_j^i + \Gamma_{jk}^{*i}\omega^k + C_j^{ik}\theta_k^*,$$

kur

$$\begin{gathered}\theta_i^* = \theta_i - \Gamma_{ij}w^j, \quad \Gamma_{ij} = \Gamma_{ij}^{*k}u_k,\\ C_j^{ik} = C_j^{ki}, \quad R_{jk}^i = \Gamma_{jk}^{*i} - \Gamma_{kj}^{*i}.\end{gathered} \tag{3}$$

Nagrinėsime sąryšį $C\Gamma R$, invariantinį transformacijų (1) atžvilgiu. Tada

$$C_j^{ik}(x, `u) = \rho^{-1}C_j^{ik}(x, u), \quad \Gamma_{jk}^{*i}(x, `u) = \Gamma_{jk}^{*i}(x, u), \quad C_j^{ik}u_k = 0. \tag{4}$$

Kadangi sąryšis $C\Gamma R$ metrinis, tai

$$\Gamma^*\Gamma\nabla_k g_{ij} \equiv g_{ijk} + g_{ij}^p\Gamma_{pk} = g_{ip}\Gamma_{jk}^{*p} - g_{pj}\Gamma_{ik}^{*p} = 0, \tag{5}$$

$$g_{ij}^k - g_{pj}C_i^{pk} - g_{ip}C_j^{pk} = 0. \tag{6}$$

Iš lygčių (5), (6) gausime

$$2\Gamma_{ij}^{*k} = g^{pk}(\Gamma\nabla_j g_{ip} + \Gamma\nabla_i g_{jp} - \Gamma\nabla_p g_{ij}) + g^{pk}(g_{qi}R_{pj}^q + g_{qj}R_{ip}^q + g_{pq}R_{ij}^q), \tag{7}$$

$$\Gamma_{ij} = B_{ij}^{pq}[\gamma_{pq}^o + 2^{-1}(R_{pq}^o + g_{sp}R_{qo}^s + g_{sq}R_{io}^s)], \tag{8}$$

$$C_k^{ij} = 2^{-1}g_{pk}(g^{ijp} - g^{jpi} - g^{pij}), \tag{9}$$

kur

$$\gamma_{ij}^o = 2^{-1}u^p(g_{jpi} + g_{pij} - g_{ijp}),$$

$$R_{pq}^o = R_{pq}^i u_i, \quad R_{io}^k = R_{ij}^k u^j, \quad u^j = g^{ji}u_i,$$

$$H_{ij}^{pq} = \delta_i^p\delta_j^q - 2^{-1}(g_{io}^p\delta_j^q + g_{jo}^p\delta_i^q - g_{ij}^p u^q), \tag{10}$$

$$H_{ij}^{pq}B_{pk}^{ks} = \delta_i^k\delta_j^s, \quad \Gamma\nabla_j g_{ip} \equiv g_{ipj} + g_{ip}^q\Gamma_{qj} \tag{11}$$

IŠVADA 1. *Jei duotas bet koks antisimetrinis tenzorius* $R^i_{jk}(x,u)$, *o erdvės* M_n *metrika* $g_{ij}(x,u)$ *tokia, kad* $\det \|H^{ij}_{pq}\| \neq 0$, *tai dydžiai* Γ^{*i}_{jk}, C^i_{jk}, Γ_{ij} *išreiškiami per metrinio tenzoriaus ir jo pirmos eilės išvestinių komponentes pagal formules* (7), (8), (9).

Atlikę skaičiavimus, gausime

$$G^k_{ij} \equiv \Gamma^{\cdot k}_{ij} = \Gamma^{*\,s,k}_{ij} u_s + \Gamma^{*k}_{ij}, \tag{12}$$

$$\Gamma\nabla_j g_{ip} + \Gamma\nabla_i g_{jp} - \Gamma\nabla_p g_{ij} = 2g_{qp}\Gamma^{*q}_{ij},$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{*k,s}_{ab} u_k = {} & B^{ij}_{ab}[2^{-1}u^p(\Gamma^*\Gamma\nabla_i\Gamma g^s_{jp} + \Gamma^*\Gamma\nabla_j g^s_{ip} - \Gamma^*\Gamma\nabla_p g^s_{ij}) \\ & + B^{ij}_{ab}u^p(g_{qj}R^q_{ip} + g_{qi}R^q_{pj} - g_{qp}R^q_{ji})^{\cdot s}.\end{aligned} \tag{13}$$

Apibrėžimas 1. Jei tenzorius $R^i_{jk}(x,u)$ tenkina sąlygą

$$u_k(g^{pk}g_{qj}R^q_{ip} - g^{pk}g_{qi}R^q_{pj})^{\cdot s} = 0,$$

tai sąryšį erdvėje M_n, apibrėžtą formomis

$$^*\omega^i_j = \omega^i_j + G^i_{jk}\omega^k \tag{14}$$

vadinsime Bervaldo sąryšiu $B\Gamma R(G^i_{jk}, G^i_{jk}u_i, 0)$ su sukimosi tenzoriumi

$$R^i_{jk} = G^i_{jk} - G^i_{kj}.$$

Tada

$$^*\theta_i = \theta_i - G_{ij}\omega^j, \qquad G_{ij} = \Gamma^{*p,k}_{ij} u_p u_k + \Gamma_{ij}.$$

Apibrėžimas 2. Jei erdvės M_n Kartano metrinis sąryšis $C\Gamma R$ ir Bervaldo sąryšis $B\Gamma R$ tokie, kad

$$\Gamma^{*k}_{ij}(x) = G^k_{ij}(x),$$

tai erdvę M_n vadinsime Bervaldo erdvės analogu [2].
Paskaičiavus gauname, jei

$$\Gamma^{*k}_{ij}(x) = .\Gamma^{*k}_{ij}(x),$$

tai

$$\begin{aligned}\Gamma^{*k,s}_{ij} = {} & g^{pk}(\Gamma^*\Gamma\nabla_i g^s_{jp} + \Gamma^*\Gamma\nabla_j g^s_{ip} - \Gamma^*\Gamma\nabla_p g^s_{ij}) \\ & + (g^{pk}g_{qi}R^s_{pj} + g^{pk}g_{qj}R^q_{ip} + R^k_{ji})^{\cdot s}.\end{aligned} \tag{15}$$

Iš gautosios lygybės seka, kad įrodyta teorema.

TEOREMA. *Erdvė* M_n *yra Bervaldo erdvės analogu tada ir tik tada, jei tenzorius* $R^i_{jk} = R^i_{jk}(x)$ *ir metrinis tenzorius* $g_{ij}(x,u)$ *tenkina sąlygą*

$$\Gamma^*\Gamma\nabla_i g^p_{jk} + \Gamma^*\Gamma\nabla_j g^p_{ki} - \Gamma^*\Gamma\nabla_k g^p_{ij} = 0.$$

Apibrėžimas 3. Jei erdvės M_n metrinis Kartano sąryšis $C\Gamma$ ir afininis Bervaldo sąryšis $B\Gamma$ tokie, kad

$$\Gamma^{*i}_{jk}(x,u) = G^i_{jk}(x,u),$$

tai erdvę M_n vadinsime Landsbergio erdvės analogu.

IŠVADA 2. *Erdvė M_n yra Landsbergio erdvės analogas tada ir tik tada, kai metrinis tenzorius $g_{ij}(x,u)$ tenkina sąlygą*

$$u^p(\Gamma^*\Gamma\nabla_i g^k_{jp} + \Gamma^*\Gamma\nabla_j g^k_{ip} - \Gamma^*\Gamma\nabla_p g^k_{ij}) = 0.$$

IŠVADA 3. *Kartano erdvė yra Bervaldo erdvės analogu tada ir tik tada, kai tenzorius $R^k_{ij}(x)$ ir metrinis tenzorius $g_{ij}(x,u)$ tenkina sąlygą*

$$\Gamma^*\Gamma\nabla_i g^p_{jk} = 0.$$

IŠVADA 4. *Kartano erdvė yra Landsbergio erdvės analogu tada ir tik tada, kai metrinis tenzorius $g_{ij}(x,u)$ tenkina sąlygą*

$$u^i\Gamma^*\Gamma\nabla_i g^p_{jk} = 0.$$

Pastaba 1. Finslerio erdvė yra Bervaldo erdve tada ir tik tada, kai $C_{ijk/p} = 0$ [1].

Paskaičiavus gausime erdvės M_n su Bervaldo sąryšiu $B\Gamma R$ struktūrines lygtis ir Bianki Riči tapatybes:

$$\begin{gathered} D\omega^i = \omega^k \wedge {}^*\omega^i_k + {}^B R^i_{kp}\omega^k \wedge \omega^p, \\ D^*\theta_i - {}^*\omega^k_i \wedge {}^*\theta_k = {}^B R_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k, \\ D^*\omega^i_j - {}^*\omega^k_j \wedge {}^*\omega^i_k = {}^B R^i\omega_{jkp}\omega^k \wedge \omega^p, \\ G, G\nabla_{[j}{}^B R^i_{kp]} + {}^B R^i_{q[p}{}^B R^q_{kj]} - {}^B R^i_{[kpj]} = 0, \\ G, G\nabla_{[q}{}^B R^i_{|j|kp]} - {}^B R^i_{js[k}{}^B R^s_{pq]} = 0, \\ G, G\nabla_{[q}{}^B R_{|i|jk]} = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Iš lygčių (16) seka, jog

$${}^B R_{ioko} = {}^B R_{koio}, \tag{17}$$

jeigu tenzorius ${}^B R^i_{jk}(x,u)$ tenkina sąlygą

$$(G, \Gamma\nabla_{[k}{}^B R^p_{iq]} + {}^B R^j_{[qk}{}^B R^p_{i]j})u_p u^q = 0, \tag{18}$$

kur

$${}^B R_{ijkp} = {}^B R^q_{jkp} g_{qi}, \qquad {}^B R_{ioko} = {}^B R_{ipkq} u^p u_q.$$

Pavyzdžiui, jeigu

$$R^i_{jk} = 1^i(a_j b_k - a_k b_j),$$

kur

$$1^i = (u_j g^{ij})(g^{ij}u_i u_j)^{-0.5},$$

o $a_i = a_i(x)$, $b_i = b_i(x)$ – gradientiniai kovektoriai, tai paskaičiavus gausime, kad toks tenzorius R^i_{jk} tenkina sąlygą (18).

Apibrėžimas 4. Dydis $K^B(x, u, v)$, apibrėžiamas pagal formulę

$$[K^B(g_{ik}g_{jp} - g_{ij}g_{kp}) - R_{ijkp}]1^i 1^k v^j v^p = 0, \tag{19}$$

kur v^i – bet koks vektoriaus laukas, vadinamas erdvės M_n G-skaliariniu kreivumu.

Jei K^B nepriklauso nuo v^i, tai erdvė M_n vadinama pastovaus G-skaliarinio kreivumo erdve.

Iš lygčių (18) išplaukia, jog

$$F^2 K^G(x, u, v) h_{ij} v^i v^j = R_{oioj} v^i v^j,$$

kur

$$F^2 \equiv u^j u_j, \quad h_{ij} = g_{[ij} - u_i u_j.$$

(h_{ij} – kampinė metrika erdvėje M_n).

IŠVADA 5. *Jeigu tenzorius $R^i_{jk}(x, u)$ tenkina sąlygą (18), tai erdvės M_n pastovus G-skaliarinis K^G skaičiuojamas pagal formulę*

$$F^2 K^G h_{ij} = {}^B R_{oioj}. \tag{20}$$

Pastaba 2. Jei erdvė M_n su absoliučiu hiperplokštuminių elementų lygiagretumu ir sąryšis $C\Gamma$ su nuliniu sukimosi tenzoriumi, tai pastovus skaliarinis kreivumas K skaičiuojamas pagal formulę [1]

$$F^2 K h_{ij} = R_{oioj}. \tag{21}$$

Pastaba 3. Finslerio erdvės pastovus skaliarinis kreivumas skaičiuojamas pagal formulę (21)[1].

LITERATŪRA

[1] H. Rund, *The Differential Geometry of Finsler Spaces*, Springer, 1952.

[2] S. Numata, On generalized Berwald Spaces of G-skalar curvature, *Tensor*, **41** (1984), 200–203.

[3] I. Katinienė, Apie metrinės hiperplokštuminių elementų erdvės geometriją, Disertacija, Vilnius, 1972, p. 1–129

Berwald's Zusammenhang im Raum von hyperebenen Elementen

I. Katinienė

In dieser Arbeit wurden die speciellen Klassen der Raume von Hyperebenen Elementen gefunden. Diese Raume sind analogisch den von Berwald und Landsberg.