LMD konf. darbai, 67–73
1997, Vilnius

Общая задача Римана–Гильберта с разрывными коэффициентами для системы Мойсила–Теодореско с младшими членами

Р. Матюкайте (VDU)

Типичной задачей для системы Коши–Римана является задача Римана–Гильберта, в которой требуется найти регулярное в области D решение системы Коши–Римана

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x,$$

удовлетворяющее на границе Γ области условию

$$au + bv = f, \qquad a^2 + b^2 \neq 0,$$

где a, b и f – заданные непрерывные по Гельдеру функции.

В работе [1] исследовался аналог этой задачи для трехмерного обобщения системы Коши–Римана (система Мойсила–Теодореско)

$$\begin{cases} u_x + v_y + w_z = 0, \\ s_x - v_z + w_y = 0, \\ s_y + u_z - w_x = 0, \\ s_z - u_y + v_x = 0, \end{cases}$$

с граничными условиями $a_i s + b_i u + c_i v + d_i w = f_i$, $i = 1, 2$. В статье [2] получены условия существования и единственности решения задачи с граничными условиями другого типа, названной задачей Римана–Гильберта с разрывными коэффициентами.

В этой статье будет рассмотрен общий случай задачи Римана–Гильберта с разрывными коэффициентами для системы Мойсила–Теодореско с младшими членами.

Пусть область G определена неравенствами $0 < x < \varphi(y, z)$, $(y, z) \in E$, где E – плоская область с гладкой границей L, к тому же $\varphi > 0$ в E и $\varphi = 0$ на L. Поверхность $B = \{x = \varphi(y, z), (y, z) \in E\}$ гладкая и ортогонально пересекается с плоскостью $x = 0$ по линии L.

Для системы

$$\begin{cases} u_x + v_y + w_z + a_{11}s + a_{12}u + a_{13}v + a_{14}w = 0, \\ s_x - v_z + w_y + a_{21}s + a_{22}u + a_{23}v + a_{24}w = 0, \\ s_y + u_z - w_x + a_{31}s + a_{32}u + a_{33}v + a_{34}w = 0, \\ s_z - u_y + v_x + a_{41}s + a_{42}u + a_{43}v + a_{44}w = 0, \\ a_{ij} = const, \\ a_{33} = a_{44}, \ a_{43} = -a_{34}, \end{cases} \tag{1}$$

рассматривается задача: найти регулярное в области $G \in R^3$ решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} &\nu|_{x=0} = g_1(y,z), && w|_{x=0} = g_2(y,z), \\ &s|_B = f_1(\widetilde{X}), && u|_B = f_2(\widetilde{X}), \quad \widetilde{X} \in B. \end{aligned} \tag{2}$$

Замечание. Здесь функции f_1, f_2 и g_1, g_2 непрерывны. В окрестности линии L, f_1 и f_2 дифференцируемы, причем на L

$$\left.\frac{\partial f_i}{\partial x}\right|_L = g_j, \qquad j = 1, 2.$$

Тогда решения s и u непрерывны в $G \cup B$ и непрерывно дифференцируемы в $G \cup E$.

Из третьего и четвертого уравнений системы (1) получаем

$$\begin{aligned} w(X) &= \int_0^x (s_y + u_z + a_{31}s + a_{32}u + a_{33}\nu + a_{34}w)\,dx + g_2(y,z), \\ \nu(X) &= \int_0^x (u_y - s_z - a_{41}s - a_{42}u - a_{43}\nu - a_{44}w)\,dx + g_1(y,z), \qquad X = (x,y,z). \end{aligned} \tag{3}$$

Следствием системы (1) и выражений (3) являются соотношения

$$\begin{cases} \Delta s + (a_{21} - a_{34})s_x + (a_{31} - a_{24})s_y + (a_{41} - a_{23})s_z + (a_{22} - a_{44})u_x \\ \quad +(a_{32} + a_{23})u_y + (a_{42} + a_{24})u_z + A_1 s + A_2 u + A_3 \nu + A_4 w = 0, \\ \Delta u + (a_{12} - a_{34})u_x + (a_{13} - a_{42})u_y + (a_{32} + a_{14})u_z + (a_{11} + a_{33})s_x \\ \quad +(a_{14} - a_{41})s_y + (a_{31} - a_{13})s_z + B_1 s + B_2 u + B_3 \nu + B_4 w = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} &A_1 = -a_{44}a_{11} - a_{34}a_{21} - a_{23}a_{41} + a_{24}a_{31}, && A_3 = -a_{44}a_{13} + a_{24}a_{33}, \\ &A_2 = -a_{44}a_{12} - a_{34}a_{22} - a_{23}a_{42} + a_{24}a_{32}, && A_4 = -a_{44}(a_{14} + a_{23}), \\ &B_1 = a_{14}a_{31} - a_{13}a_{41} + a_{33}a_{21} - a_{34}a_{11}, && A_3 = a_{14}a_{33} + a_{44}a_{23}, \\ &B_2 = a_{14}a_{32} - a_{13}a_{42} + a_{33}a_{22} - a_{34}a_{12}, && B_4 = a_{44}(a_{24} - a_{13}). \end{aligned}$$

Очевидно, что $A_3 = B_4$ и $A_4 = -B_3$. Если $A_3 = A_4 = 0$, т.е. $a_{13} = a_{24}$, $a_{14} = -a_{23}$, то в уравнения для s и u не входят ν и w.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} = a_{21} - a_{34}, && \alpha_{12} = a_{31} + a_{24}, && \alpha_{13} = a_{41} - a_{23}, \\ &\alpha_{21} = a_{11} + a_{33}, && \alpha_{22} = a_{14} - a_{41}, && \alpha_{23} = a_{31} - a_{13}, \\ &\beta_{11} = a_{22} - a_{44}, && \beta_{12} = a_{32} + a_{23}, && \beta_{13} = a_{42} + a_{24}, \\ &\beta_{21} = a_{12} - a_{34}, && \beta_{22} = a_{13} - a_{42}, && \beta_{23} = a_{32} + a_{14}. \end{aligned}$$

Тогда система (4) принимает вид

$$\begin{cases} \Delta s + \alpha_{11}s_x + \alpha_{12}s_y + \alpha_{13}s_z + \beta_{11}u_x + \beta_{12}u_y + \beta_{13}u_z + A_1 s + A_2 u = 0, \\ \Delta u + \alpha_{21}s_x + \alpha_{22}s_y + \alpha_{23}s_z + \beta_{21}u_x + \beta_{22}u_y + \beta_{23}u_z + B_1 s + B_2 u = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Из первых двух уравнений системы (1) следует

$$(u_x + a_{11}s + a_{21}u)|_{x=0} = -\frac{\partial g_1}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} - a_{13}g_1 - a_{14}g_2 \equiv \psi_1(y,z),$$
$$(s_x + a_{21}s + a_{22}u)|_{x=0} = \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_2}{\partial y} - a_{23}g_1 - a_{24}g_2 \equiv \psi_2(y,z).$$

Таким образом, приходим к следующей задаче: в области G найти решение системы (5), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} &s|_B = f_1(\widetilde{X}), \qquad u|_B = f_2(\widetilde{X}), \qquad \widetilde{X} \in B, \\ &u_x + a_{11}s + a_{12}u = \psi_1(y,z), \\ &s_x + a_{21}s + a_{22}u = \psi_2(y,z) \qquad \text{на} \quad E, \ \text{т.е. при } x = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Сначала решим вспомогательную задачу. Обозначим G_0 область $\{-\varphi(y,z) < x < 0, (y,z) \in E\}$, $D = G \cup E \cup G_0$ и Γ – границу области D. Найдем решение уравнения Пуассона $\Delta u = F(X)$, $X = (x,y,z)$ в области G с граничными условиями

$$u|_B = f(\widetilde{X}), \quad \widetilde{X} \in B, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_E = h(y,z).$$

Построим функцию Грина следующим образом [3]. Пусть $G(X,P)$, $X = (x,y,z)$, $P = (a,b,c)$ – функция Грина области D для задачи Дирихле уравнения $\Delta u = 0$. Образуем функцию $H(X,P) = G(X,P) + G(\overline{X},P)$, $\overline{X} = (-x,y,z)$. Нетрудно убедиться, что

$$H(X,P) = 0, \quad P \in B, \quad X \in G \qquad \text{и} \qquad \left.\frac{\partial H}{\partial a}\right|_{a=0} = 0.$$

Написав формулу Грина для функции $H(X,P)$ и решения $u(P)$ вспомогательной задачи в области G, получим

$$\begin{aligned} u(X) = &\int_G H(X,P)F(P)\,d\Omega - \int_B f(P)\frac{\partial H(X,P)}{\partial_P \nu}\,d\sigma \\ &+ \int_E H(X,b,c)h(b,c)\,db\,dc. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Введем обозначения $s(0,y,z)=\mu(y,z)$, $u(0,y,z)=\nu(y,z)$ и в формуле (*) положим

$$F(X)=-\alpha_{11}s_x-\alpha_{12}s_y-\alpha_{13}s_z-\beta_{11}u_x-\beta_{12}u_y-\beta_{13}u_z-A_1s-A_2u,$$
$$h(y,z)=\psi_1(y,z)-a_{11}\mu(y,z)-a_{12}\nu(y,z).$$

Имеем

$$\begin{aligned}s(X)=-\int_G&\big[H(X,P)(\alpha_{11}s_a+\beta_{11}u_a)\\&+H(X,P)(\alpha_{12}s_b+\beta_{12}u_b)+H(X,P)(\alpha_{13}s_c+\beta_{13}u_c)\\&+H(X,P)(A_1s+A_2u)\big]\,d\Omega\\&-\int_B f_1(P)\frac{\partial H(X,P)}{\partial_P\nu}\,d\sigma+\int_E H(X,b,c)\psi_1(b,c)\,db\,dc\\&-\int_E a_{11}H(X,b,c)\mu(b,c)\,db\,dc-\int_E a_{12}H(X,b,c)\nu(b,c)\,db\,dc.\end{aligned}$$

Функции

$$G_1(X)=-\int_B f_1(P)\frac{\partial H(X,P)}{\partial_P\nu}\,d\sigma \qquad\text{и}\qquad Q_1(X)=\int_E H(X,b,c)\psi_1(b,c)\,db\,dc$$

– известные гармонические функции. Согласно формуле Гаусса–Остроградского

$$\begin{aligned}\int_G&\big[H(X,P)(\alpha_{11}s_a+\beta_{11}u_a)+H(X,P)(\alpha_{12}s_b+\beta_{12}u_b)\\&+H(X,P)(\alpha_{13}s_c+\beta_{13}u_b)\big]\,d\Omega\\=-\int_G&\Big\{s(P)\Big[\alpha_{11}\frac{\partial H}{\partial a}+\alpha_{12}\frac{\partial H}{\partial b}+\alpha_{13}\frac{\partial H}{\partial c}\Big]\\&+u(P)\Big[\beta_{11}\frac{\partial H}{\partial a}+\beta_{12}\frac{\partial H}{\partial b}+\beta_{13}\frac{\partial H}{\partial c}\Big]\Big\}\,d\Omega\\&+\int_\Sigma\Big\{H(X,P)\big[(\alpha_{11}s+\beta_{11}u)\cos(\nu,a)+(\alpha_{12}s+\beta_{12}u)\cos(\nu,b)\\&+(\alpha_{13}s+\beta_{13}u)\cos(\nu,c)\big]\Big\}\,d\sigma,\end{aligned}$$

здесь $\Sigma=\Gamma\cup E$, $H|_\Gamma=0$, $\cos(\nu,b)=0$ и $\cos(\nu,c)=0$ на E, а $\cos(\nu,a)=1$. Вводя обозначения

$$K_{11}^{(1)}(X,P)=\alpha_{11}\frac{\partial H}{\partial a}+\alpha_{12}\frac{\partial H}{\partial b}+\alpha_{13}\frac{\partial H}{\partial c},$$
$$K_{12}^{(1)}(X,P)=\beta_{11}\frac{\partial H}{\partial a}+\beta_{12}\frac{\partial H}{\partial b}+\beta_{13}\frac{\partial H}{\partial c},$$

получаем

$$\int\limits_G \big[H(X,P)(\alpha_{11}s_a+\beta_{11}u_a)$$
$$+H(X,P)(\alpha_{12}s_b+\beta_{12}u_b)+H(X,P)(\alpha_{13}s_c+\beta_{13}u_b)\big]\,d\Omega$$
$$=-\int\limits_G \big[K_{11}^{(1)}(X,P)s(P)+K_{12}^{(1)}(X,P)u(P)\big]\,d\Omega$$
$$+\int\limits_E H(X,b,c)[\alpha_{11}\mu(b,c)+\beta_{11}\nu(b,c)]\,db\,dc.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} s(X)=G_1(X)+Q_1(X)&+\int\limits_G \big[K_{11}^{(1)}(X,P)s(P)+K_{12}^{(1)}(X,P)u(P)\big]\,d\Omega\\ &-\int\limits_G H(X,P)(A_1s+A_2u)\,d\Omega\\ &+\int\limits_E H(X,b,c)[\alpha_{11}\mu(b,c)+\beta_{11}\nu(b,c)]\,db\,dc. \end{aligned}\tag{7}$$

Аналогично получаем:

$$\begin{aligned} u(X)=G_2(X)+Q_2(X)&+\int\limits_G \big[K_{21}^{(1)}(X,P)s(P)+K_{22}^{(1)}(X,P)u(P)\big]\,d\Omega\\ &-\int\limits_G H(X,P)(B_1s+B_2u)\,d\Omega\\ &+\int\limits_E H(X,b,c)[\alpha_{21}\mu(b,c)+\beta_{21}\nu(b,c)]\,db\,dc. \end{aligned}\tag{8}$$

где

$$G_2(X)=-\int_B f_2(P)\frac{\partial H(X,P)}{\partial_P\nu}\,d\sigma,\qquad Q_2(X)=\int_E H(X,b,c)\psi_2(b,c)\,db\,dc$$

$$K_{21}^{(1)}(X,P)=\alpha_{21}\frac{\partial H}{\partial a}+\alpha_{22}\frac{\partial H}{\partial b}+\alpha_{23}\frac{\partial H}{\partial c},$$
$$K_{22}^{(1)}(X,P)=\beta_{21}\frac{\partial H}{\partial a}+\beta_{22}\frac{\partial H}{\partial b}+\beta_{23}\frac{\partial H}{\partial c}.$$

Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
M_1(X) &= G_1(X) + Q_1(X),\\
M_2(X) &= G_2(X) + Q_2(X),\\
K_{11}(X, P) &= K_{11}^{(1)}(X, P) - A_1 H(X, P),\\
K_{12}(X, P) &= K_{12}^{(1)}(X, P) - A_2 H(X, P),\\
K_{21}(X, P) &= K_{21}^{(1)}(X, P) - B_1 H(X, P),\\
K_{22}(X, P) &= K_{22}^{(1)}(X, P) - B_2 H(X, P).
\end{aligned}
$$

Соотношения (7) и (8) перепишем в виде

$$
\begin{aligned}
s(X) = M_1(X) &+ \int\limits_G \big[K_{11}(X, P)s(P) + K_{12}(X, P)u(P)\big]\,d\Omega\\
&+ \int\limits_E \big[\alpha_{11} H(X, b, c)\mu(b, c)\\
&+ \beta_{11} H(X, b, c)\nu(b, c)\big]\,db\,dc,\\
u(X) = M_2(X) &+ \int\limits_G \big[K_{21}(X, P)s(P) + K_{22}(X, P)u(P)\big]\,d\Omega\\
&+ \int\limits_E \big[\alpha_{21} H(X, b, c)\mu(b, c)\\
&+ \beta_{21} H(X, b, c)\nu(b, c)\big]\,db\,dc.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Устремив x к нулю, т.е. $X \to (y, z)$, из (9) получаем

$$
\begin{cases}
\mu(y,z) &= m_1(y,z) + \int\limits_G [K_{11}(0,y,z,P)s(P) + K_{12}(0,y,z,P)u(P)]\,d\Omega\\
&\quad + \int\limits_E \big[\alpha_{11} L(y,z,b,c)\mu(b,c) + \beta_{11} L(y,z,b,c)\big]\,db\,dc,\\
\nu(y,z) &= m_2(y,z) + \int\limits_G [K_{21}(0,y,z,P)s(P) + K_{22}(0,y,z,P)u(P)]\,d\Omega\\
&\quad + \int\limits_E \big[\alpha_{21} L(y,z,b,c)\mu(b,c) + \beta_{21} L(y,z,b,c)\big]\,db\,dc,
\end{cases}
\tag{10}
$$

где $M_j(0, y, z) = m_j(y, z)$, $j = 1, 2$; $L(y, z, b, c) = H(0, y, z, b, c)$; K_{ij}, $i, j = 1, 2$, L – фредгольмовые ядра.

Система 4-х интегральных уравнений (9) и (10) является системой уравнения Фредгольма относительно 4-х искомых функций $s(X)$, $\mu(y, z)$, $u(X)$ и $\nu(y, z)$.

Таким образом, для определения компонент s и u решения задачи (2) для системы (1) имеем систему интегральных уравнений Фредгольма (9) и (10). Вопрос о разрешимости этих уравнений решается теорией Фредгольма (три теоремы Фредгольма) [4].

После того, как функции s и u определены, из третьего и четвертого уравнений системы (1) находим

$$-w_x + a_{33}v + a_{34}w = \omega(x, y, z), \qquad v_x + a_{43}v + a_{44}w = \omega_2(x, y, z), \tag{11}$$

где $\omega_1 = -(s_y + u_z + a_{31}s + a_{32}u)$, $\omega_2 = -(s_z - u_y + a_{41}s + a_{42}u)$.

К (11) присоединив условия

$$v|_{x=0} = g_1(y, z), \qquad w|_{x=0} = g_2(y, z)$$

получаем задачу Коши (12) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11), в которую y и z входят в качестве параметров.

Теорема. *Если коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям* $a_{24} = a_{13}$, $a_{23} = -a_{14}$, $a_{43} = -a_{34}$, $a_{44} = a_{33}$ *то задача* (2) *для системы* (1) *фредгольмова.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Бицадзе, *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка*, Наука, Москва, 1966.

[2] Р. Матюкайте, Задача Римана–Гильберта с разрывными коэффициентами для системы Мойсила–Теодореско, *Дифференциальные уравнения*, **32**(3) (1996), 1501.

[3] Л. Н. Сретенский, *Теория волновых движений жидкости*, Наука, Москва, 1977.

[4] П. П. Забрейко, А. И. Кошелев, М. А. Красносельский, С. Г. Михлин, Л. С. Раковщик, В. Я. Стеценко, *Интегральные уравнения*, Наука, Москва, 1968.

General Riemann–Hilbert problem with discontinuous coefficients for Moisil–Theodoresco system with junior members

E. Matiukaitė

For Moisil–Theodoresco system with junior members a problem of new type, called Riemann-Hilbert problem with discontinuous coefficients, is considered. Under certain conditions this problem is proved to have Fredholm property for the mentioned system.