

# Lietuvos ekonominių rodiklių ekonometrinis modeliavimas

Žilvinas KALINAUSKAS

el. paštas: zkalinauskas@mail.lbank.lt

Tiek ekonominė literatūra, tiek praktinio darbo patirtis rodo, kad egzistuoja ryšys tarp BVP, užsienio prekybos, pinigų ir pajamų rodiklių, kainų bei nedarbo. Paminėsime Blanšaro (Blanchard) darbą, kuriame jis SVAR modelius taiko BVP, vartojimo kainų indekso, nedarbo, M1 ir darbo užmokesčio analizei [1, 2].

Darbe nagrinėjamas Lietuvos rodiklių vektorius:

$$\mathbf{X}(t) = (Y(t), E(t), I(t), W(t), M(t), P(t))^T = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_d(t))^T.$$

Čia  $Y$  žymi BVP,  $E$  ir  $I$  – atitinkamai prekių ir paslaugų eksportą ir importą,  $W$  – vidutinį mėnesinį darbo užmokesį,  $M$  – pinigų kiekį,  $P$  – kainų indeksą,  $t$  – laiką ketvirčiais. Nedarbo buvo atsisakyta, kadangi Lietuvos darbo biržos duomenys yra nepatikimi. Pradiniame etape apsiribota detalesne BVP bei užsienio prekybos rodiklių analize, vėliau įtraukiant pinigų, pajamų ir kainų rodiklius. Kadangi VAR metodologija taikoma stacionarioms laiko sekoms, atlikta ši transformacija:

$$\mathbf{x}_i(t) = \Delta X_i(t) = X_i(t) - X_i(t-1) \text{ (alternatyva } \mathbf{x}_i(t) = \Delta \log X_i(t)\text{)}.$$

SVAR modeliai ekonometrinuose tyrimuose yra labai populiarūs. Bendra modelio išraiška yra tokia:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(L)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{C}\varepsilon(t). \quad (1)$$

Čia  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  yra matricos,  $\mathbf{x}(t)$  – endogeninių rodiklių vektorius,  $\mathbf{Z}(t)$  – kintamųjų vektorius, kuris rodo įvairių egzogeninių rodiklių, sezoniškumo bei kitų veiksnių įtaką endogeninių rodiklių raidai,  $\varepsilon(t)$  – balto triukšmo vektorius, kuris ekonominėje literatūroje vadinamas atsitiktinių šokių vektoriumi.  $\mathbf{A}(L)$  yra matricinis poslinkio laike operatoriaus  $L$  polinomas.

Apibūdinant įprastus VAR modelius daromos tokios prielaidos:

1) vektorius  $\varepsilon(t)$  laikomas stacionariu baltu triukšmu, nepriklausančiu nuo  $Z$ :

$$E\varepsilon(t) = 0, \text{ cov}(\varepsilon(t), \varepsilon(\tau)) = \begin{cases} V, & t = \tau \\ 0, & t \neq \tau \end{cases},$$

2) vektoriaus  $\varepsilon(t)$  komponentai nekoreliuoti, t.y. matrica  $\mathbf{V}$  yra diagonalinė,

3)  $\varepsilon(t)$  nekoreliuoja su  $x(t)$  praeitimi, t.y.  $\text{cor}(\varepsilon(t), x(\tau)) = 0$ , jei  $\tau < t$ ,

4) matricos  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$  ir  $\mathbf{V}$  neišsigimusios,

5) matricų  $\mathbf{A}$  ir  $\mathbf{C}$  pagrindinės įstrižinės elementai lygūs vienetui.

SVAR modelio redukuota forma (arba įprastinis VAR modelis) gaunama (1) lygtį iš kairės padauginus iš atvirkštinės matricos  $\mathbf{A}^{-1}$ :

$$x(t) = \Phi(L)x(t) + \Psi Z(t) + \xi(t), \quad (2)$$

kur  $\Phi(L) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}(L)$ ,  $\Psi = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ ,  $\xi(t) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\varepsilon(t)$ . Ši modelio forma tiesiogiai aprašo tik endogeninių rodiklių vektoriaus  $x(t)$  ryšį su jo praeitimi ir  $\mathbf{Z}$ . Redukuota forma kiekybiškai neparodo įvairių atsitiktinių šokų  $\varepsilon_i(t)$  įtakos endogeninių kintamųjų vektoriaus komponentams  $x_j(t)$  tuo pačiu laiko momentu  $t$ . Įvykus atsitiktiniam šokui, nagrinėjami rodikliai pasikeičia, ką apibūdina naujovės arba inovacijos. Inovacijų vektorius  $\xi(t)$  koreliuoja su  $x(t)$  dabarties reikšmėmis, tačiau nepriklauso nuo jų reikšmių praeityje bei  $\mathbf{Z}(t)$ . Jei  $\xi(t)$  komponentai  $\xi_i(t)$  ir  $\xi_j(t)$  koreliuoti, tai rodo, kad arba  $\varepsilon_i(t)$  veikia  $x_j(t)$ , arba  $\varepsilon_j(t)$  veikia  $x_i(t)$ . Kiekybiškai šį ryšį aprašo tik struktūrinė forma.

Paprastai taikant modelius (1) matrica  $\mathbf{C}$  yra vienetinė, nors Blanšaras pasisako ir už kitų variantų nagrinėjimą. Esant prielaidai, kad matrica  $\mathbf{A}$  yra apatinė trikampė matrica, iš (1) lygties gaunamas populiarus praktikoje rekursyvinis modelis. Svarbi jo savybė yra tai, kad efektyvūs parametrai įverčiai gaunami įprastiniu mažiausių kvadratų metodu (MKM), kas negalioja bendru atveju.

Praktinėms išvadoms formuluoti labai patogi SVAR modelių charakteristika yra taip vadinamosios reakcijos į impulsus funkcijos. SVAR modelis yra tiesinis tiek atsitiktinių šokų  $\varepsilon(t)$  struktūrinėje formoje (1), tiek inovacijų vektoriaus  $\xi(t)$  redukuotoje formoje (2) atžvilgiu. Taigi vektorinio proceso  $x$  reikšmės ateityje galima išreikšti kaip dviejų komponentų sumą:

$$x(t + \tau) = \tilde{x}(t, \tau) + \mathbf{Q}(\tau)\varepsilon(t) = \tilde{x}(t, \tau) + \mathbf{H}(\tau)\xi(t),$$

kur:  $\tilde{x}(t, \tau)$  nepriklauso nuo  $\varepsilon(t)$  ir parodo, koks būtų  $x(t + \tau)$  dydis, jei laiko momentu  $t$  neįvyktų jokių atsitiktinių pusiausvyros trikdžių;  $\mathbf{Q}(\tau)$  ir  $\mathbf{H}(\tau)$  – matricos, dėl modelio stacionarumo nepriklausančios nuo  $t$ .

Pažymėkime  $Q_{ij}(\tau)$  ir  $H_{ij}(\tau)$  atitinkamus matricų  $\mathbf{Q}(\tau)$  ir  $\mathbf{H}(\tau)$  elementus. Funkcijos  $Q_{ij}(\cdot)$  ir  $H_{ij}(\cdot)$  yra vadinamos reakcijos į impulsus funkcijomis, kadangi jos parodo atitinkamai vienetinio dydžio šoko  $\varepsilon_j(t)$  arba inovacijos  $\xi_j(t)$  indėlį į rodiklio  $x_i$  pokyčius ateityje. Identifikavus SVAR modelį, funkcijos  $\mathbf{Q}(\tau)$  ir  $\mathbf{H}(\tau)$  randamos pagal formules:

$$\mathbf{H}(\tau) = \Phi_1\mathbf{H}(\tau - 1) + \dots + \Phi_p\mathbf{H}(\tau - p), \quad \tau = 1, 2, \dots, \mathbf{Q}(\tau) = \mathbf{H}(\tau)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C},$$

kur  $\mathbf{H}(k)$  laikoma lygiu 0, jei  $k < 0$ ,  $\mathbf{H}(0)$  – vienetinė matrica, o matricos  $\Phi_j$  apibrėžiamos lygybe

$$\Phi(L) = \sum_{j=1}^p \Phi_j L^j.$$

Deja, taikant SVAR modelį Lietuvos rodikliams, susidurta su rimtomis problemomis. Kadangi stebėjimai iki 1995 m. dėl įvykusių permainų šalies ekonomikoje beveik neneša informacijos apie ryšius tarp makroekonominių rodiklių dabartyje, statistiškai identifikuojant modelį galima panaudoti tik apie 20 vektoriaus  $x(t)$  stebėjimų. Šioje situacijoje tenka apsiriboti rekursyviniais modeliais su nedideliu (3–4) vertinamų koeficientų skaičiumi kiekvienoje lygtyje. Tačiau tokie modeliai, gana gerai aprašę rodiklių raidą iki Rusijos krizės (1995 m. I ketv. – 1998 m. III ketv.), neadekvačiai atspindėjo ekonominę situaciją paskutiniais ketvirčiais ir šiuo metu prognozavimui netinka.

Pateiksime kai kuriuos pastebėjimus dėl BVP ( $Y$  lygtis). Iki krizės Rusijoje buvo glaudus ryšys tarp BVP ir M1 pokyčių su keturių ketvirčių lagu (panaši situacija buvo pastebėta analizuojant ir Latvijos duomenis, tuo tarpu tokio ryšio tarp Estijos BVP ir M1 pastebėta nebuvo). Po Rusijos krizės šis ryšys Lietuvoje nepastebimas. Dėl to anksčiau naudotų modelių gautos prognozės buvo netikslios, todėl teko juos keisti kitais, ieškoti naujų metodų. Vienas iš jų – skaidyti BVP į sudėtines dalis (komponentus) ir jas prognozuoti atskirai. Tegu

$$Y = \sum_j Y_j,$$

kur  $Y_j$  – BVP komponentai (pvz., pramonės, prekybos, statybos, transporto ir t.t. pagamintas BVP).  $Y_j$  aprašyti taikomi regresiniai modeliai (ARIMAX tipo)

$$Y_j = B_j Z_j(t) + \xi_j(t).$$

Čia  $B_j Z_j(t)$  yra regresinė dalis (kartais sezoniškumo indeksas), o  $\xi_j(t)$  – ARIMA dalis. Įvertinus parametrus gaunama modelinė prognozė  $\hat{y}_j(t)$  per vieną žingsnį:

$$\hat{y}_j(t) = f_j(Z_j(t), y_j(t-1), y_j(t-2), \dots | \hat{\theta}_j),$$

kur  $f_j$  – tiesinė funkcija,  $\hat{\theta}_j$  – nežinomų koeficientų įverčiai. Sudėjus kiekvieno komponento prognozes gaunama bendra BVP prognozė

$$\hat{y}(t) = \sum_j \hat{y}_j(t). \quad (3)$$

Tuo pačiu gauname ir retrospektyvinių prognozių eilutę. Tačiau taikant tokią metodiką nepanaudojama informacija apie rodiklių priklausomybę makro lygyje.

Lietuvoje pastebėta, kad ekonominiai rodikliai aukščiausiam agregavimo lygyje yra stipriai kointegruoti, ir šie ryšiai išliko stabilūs ir Rusijos krizės laikotarpiu. Pavyzdžiui, BVP kointegruotas su eksportu ir darbo užmokesčiu. Todėl kita alternatyva SVAR modeliams būtų vektorinis paklaidų korekcijos modelis (VECM):

$$x(t) = \Pi X(t-1) + A(L)x(t) + BZ(t) + \xi(t), \quad (4)$$

kur  $\Pi X(t-1)$  kointegravimą atspindinti dalis,  $\Pi$  – matrica.

Galimas ir abiejų principų derinimas. Esu dėkingas profesoriui Rimantui Rudzkiui, kuris pasiūlė šią idėją. Pirminę prognozė  $\hat{y}(t)$ , gauta kaip komponentų prognozių suma, tikslinama, atsižvelgiant į kointegravimo liekaną. Tuo būdu:

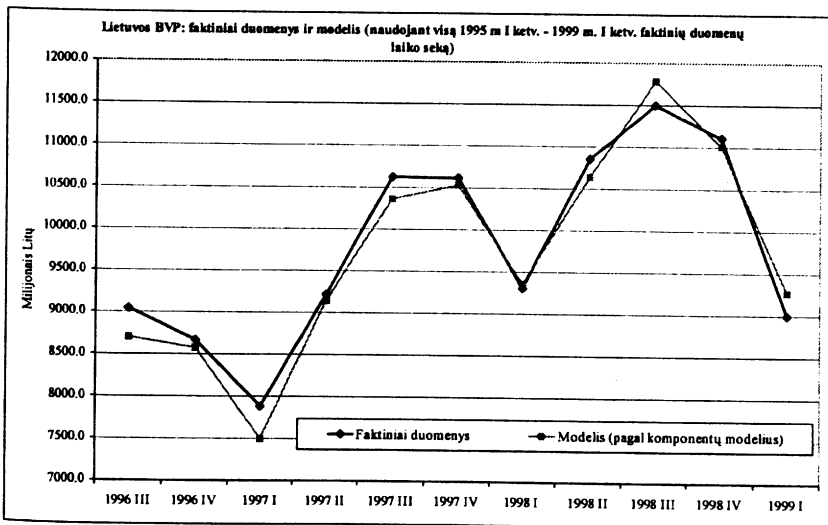
$$\hat{y}(t) = a\hat{y}(t) + \mathbf{b}^T \mathbf{X}(t-1). \quad (5)$$

Parametrai  $a$  ir  $\mathbf{b}$  įvertinami MKM:

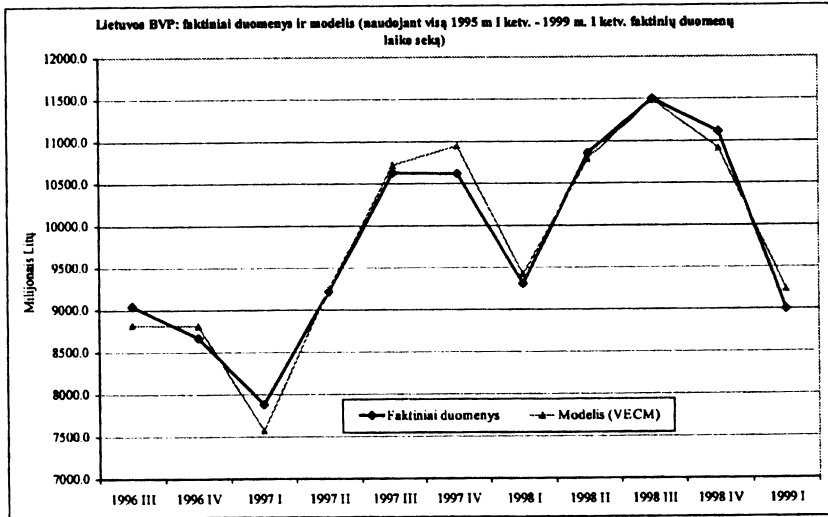
$$\sum_{t \in T} [y(t) - a\hat{y}(t) - \mathbf{b}^T \mathbf{X}(t-1)]^2 w(t) \rightarrow \min,$$

kur  $w(t)$  – svoriai, kurie įvedami ekspertiškai (senesni duomenys arba netipinio laikotarpio (bankų krizė!) duomenys gauna mažesnius svorius).

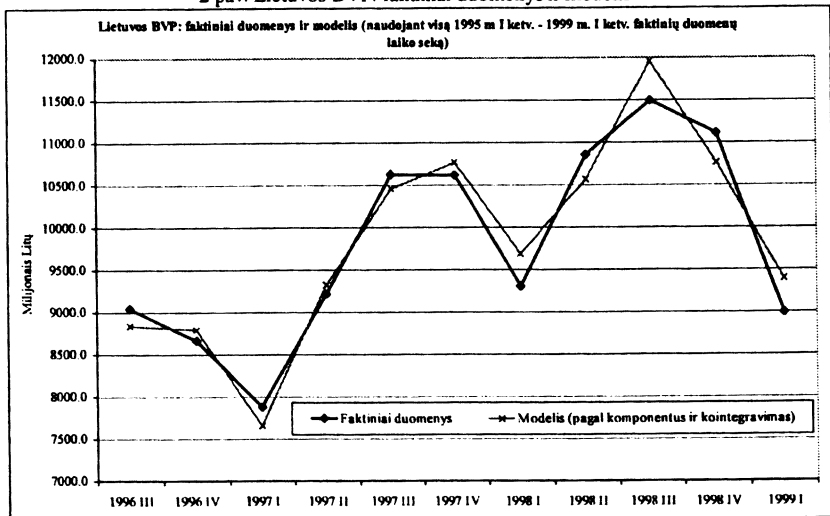
1–3 paveiksluose pavaizduotos Lietuvos BVP faktinių duomenų bei pagal juos sudarytų modelių kreivės, kai panaudojama pilna laiko seka (nuo 1995 m. I ketvirčio iki 1999 m. I ketvirčio). Visi panaudoti modeliai duoda panašius rezultatus. Tai rodo, kad BVP elgesį pakankamai tiksliai galima prognozuoti taikant visus tris modelius. Tačiau reikėtų išskirti VECM modelį (kai atsižvelgiama tik į kointegravimo ryšius makro lygyje), kurį naudojant BVP pavyksta aprašyti tiksliausiai (žr. 2 pav.). Kaip buvo minėta, BVP yra stipriai kointegruotas su prekių ir paslaugų eksportu bei vidutiniu mėnesiniu darbo užmokesčiu. Taip pat šiame modelyje įtraukti ir sezoniško koeficientai. Vertinant parametrus laikyta, kad sezoniško indeksas yra nekintantis. Tačiau ateityje pasikeitus situacijai toks modelis gali ne visai tiksliai atspindėti esančius ryšius. Tikslinant pirminę prognozė  $\hat{y}(t)$ , kuri gauta kaip komponentų prognozių suma, kointegravimo liekana, gaunami truputį optimistiniai rezultatai, t.y. modelio kreivė yra daugiau iškilusi virš faktinių duomenų kreivės (žr. 3 pav.).



1 pav. Lietuvos BVP: faktiniai duomenys ir modelis.

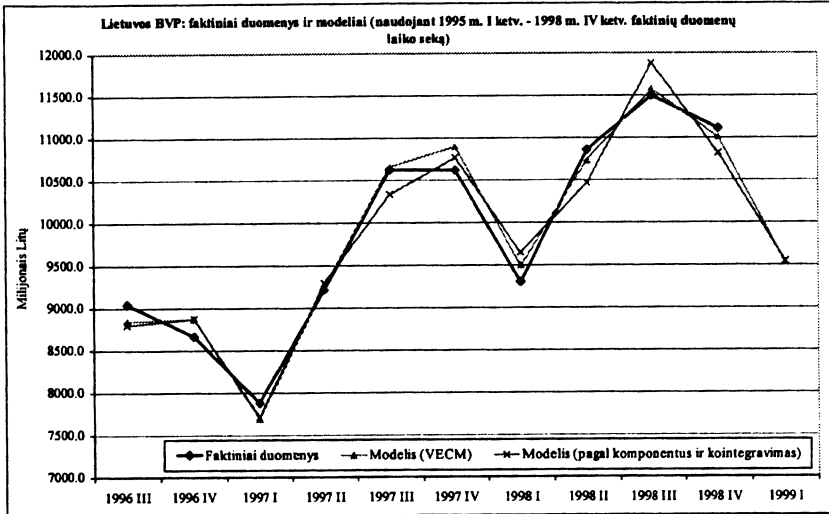


2 pav. Lietuvos BVP: faktiniai duomenys ir modelis.

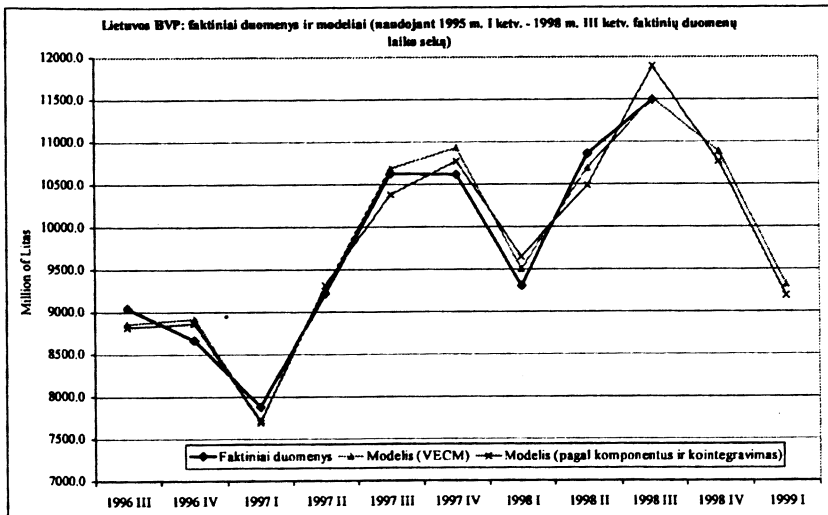


3 pav. Lietuvos BVP: faktiniai duomenys ir modelis.

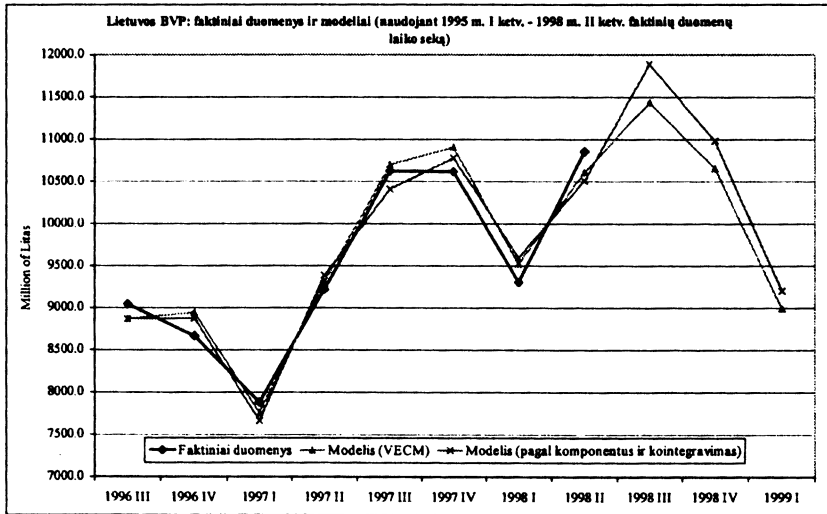
4–6 paveiksluose pavaizduotos BVP faktinių duomenų bei pagal juos sudarytų modelių kreivės, kai pradinė faktinių duomenų seka sutrumpinama vienu, dviem ir trim paskutiniais stebėjimais. Toliau daroma prognozė per vieną žingsnį (ketvirtį) į priekį. Gauta prognozė fiksuojama kaip faktas ir vėl atliekama prognozė per vieną žingsnį. Kaip ir reikėjo tikėtis, tiek VECM modelis, tiek modelis, patikslintas kointegravimo liekana, duoda panašius rezultatus. Tačiau mažiausios prognozių paklaidos tiriant retrospektyviai pastebėtos tuomet, kai faktinių duomenų seka apima laikotarpį nuo 1995 m. I ketvirčio iki 1998 m. II ketvirčio ir prognozuojama per vieną žingsnį iki 1999 m. I ketvirčio (žr. 6 pav.).



4 pav. Lietuvos BVP: faktiniai duomenys ir modeliai.



5 pav. Lietuvos BVP: faktiniai duomenys ir modeliai.



6 pav. Lietuvos BVP: faktiniai duomenys ir modeliai.

## Išvados

1. Visi trys paminėti modeliai pakankamai gerai aprašo Lietuvos BVP elgesį ir tinka jam prognozuoti.
2. Lietuvos BVP yra stipriai kointegruotas su prekių ir paslaugų eksportu bei vidutiniu mėnesiniu darbo užmokesčiu. Atsižvelgiant į šiuos ryšius ir naudojant VECM modelį kartais pavyksta gauti geresnius rezultatus nei modeliuojant atskirus BVP komponentus.
3. Tikslinant pirminę prognozę, kuri gauta kaip komponentų prognozių suma, kointegravimo liekana, dažnai rezultatai nepagerinami. Vadinasi, kažkurių BVP komponentų modeliai netiksliai aprašo jų elgesį ir tuos modelius reikėtų patikslinti. Tai numatyta padaryti artimiausiu metu.

## Literatūra

- [1] O.J. Blanchard, *A Traditional Interpretation of Macroeconomic Fluctuations*, *The American Economic Review*, **79**, 1146–1163 (1989).
- [2] O.J. Blanchard, D. Quah, *The Dynamic Effects of Aggregate Demand and Supply Disturbances*, *The American Economic Review*, **79**, 655–673 (1989).
- [3] O.J. Blanchard, M. Watson, *Are Business Cycles All Alike? The American Business Cycle: Continuity and Change* ed. R. Gordon, NBER and University of Chicago Press (1986).
- [4] J.D. Hamilton, *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- [5] R. Rudzkiš, G. Vilutis, *Makroekonominė svyravimų ekonometrinis modeliavimas*, *P pinigų studijos*, **2**, 25–37 (1999).

## **Econometric modelling of the Lithuanian economic indicators**

Ž. Kalinauskas

The paper is devoted to model relations between Lithuanian indicators of production, foreign trade, income and prices and to present short-term forecasts. The joint behaviour of Lithuanian GDP, exports and imports of goods and services, money, salaries and prices is examined by the structural vector auto-regression models (SVAR). Striving for the larger accuracy, apart the aggregated indicators their components are analysed as well.

Economic literature and experience of practical work show that there is relation between GDP, foreign trade, money and income indicators and unemployment. It was referred to Blanchard's work where he uses SVAR models to analyse GDP, consumer price index, money M1, wages and unemployment indicators. Unemployment was refused from a vector of Lithuanian economic indicators because the data from the Lithuanian labour exchange are unreliable. At the first stage there was limited oneself the detailed analysis of GDP and foreign trade indicators.

After the Russian crisis some relations between economic indicators do not observe in Lithuania. Therefore, forecasts that we calculated by using previous VAR models were not correct, and we had to change these models to the others, to look for new methods. One of them – to decompose GDP into separate parts (components) and forecast them separately.

In Lithuania it is seen that economic indicators are strongly cointegrated at the highest level of aggregation. These relations survived stable in period of the Russian crisis. For instance, GDP is cointegrated with export and wages. That is why other alternative for SVAR models would be vector error correction model (VECM).

Co-ordination of those two methods is possible. The primary forecast, which was calculated as the sum of forecasts of components, is made more exactly, taking into account the residual of cointegration.

At the end of this research some results are presented, and the forecasts of GDP that were calculated using three methods mentioned above are compared to each other.