LMD mokslo darbai, III tomas, 202–207

Finslerio struktūros atraminių viršvektorių erdvės sietys

Juozas ŠINKŪNAS (VPU)
el. paštas: sinkunas@vpu.lt

Bendroji atraminių elementų erdvių siečių teorija išnagrinėta prof. V. Blizniko darbuose [1]. Vienok, tiriant atskiras atraminių elementų erdvių klases su specialiais atraminiais objektais, gaunamos sietys su specifinėmis savybėmis, būdingomis tik tiriamų atraminių elementų erdvių klasėms.

Šiame straipsnelyje tiriama atraminių elementų erdvė, kurios atraminis elementas yra p-tos eilės kovariantinis viršvektorius (kai $p = 1$, gaunama hiperplokštuminių elementų erdvė) [3]. Ištirtos šios erdvės koliečiamosios erdvės dvi normalizacijos, kurių pagalba indukuojamos atitinkamai viršvektorinė ir tenzorinė sietys. p-tos eilės atraminių viršvektorių erdvė su joje apibrėžtu skaliarinės funkcijos lauku vadinama Finslerio struktūros atraminių p-tos eilės viršvektorių erdve. Surasta šios erdvės vidinė tiesinė sietis.

1. p-tos eilės atraminių viršvektorių erdvė

Diferencijuojamos daugdaros V_n p-tos eilės viršvektorių lauko diferencialinių lygčių sistema yra [2]:

$$\mathrm{d}V_{i_1\ldots i_a} - \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!(a-s)!}\omega^k_{(i_1\ldots i_s} V_{i_{s+1}\ldots i_a)k} = V_{i_1\ldots i_a,k}\omega^k, \tag{1}$$
$$(i,j,k = 1,2,\ldots,n; \quad a,b,c = 1,2,\ldots,p),$$

kur formos ω^k, $\omega^k_{i_1\ldots i_a}$ – daugdaros V_n transformacijų pratęstos pseudogrupės formos ir turi šitokią struktūrą:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i_k, \tag{2}$$
$$D\omega^j_{i_1\ldots i_a} = \sum_{s=1}^{a} \frac{a!}{s!(a-s)!}\omega^k_{(i_1\ldots i_s} \wedge \omega^j_{i_{s+1}\ldots i_a)k} + \omega^k \wedge \omega^j_{i_1\ldots i_a k}.$$

Apibrėžę diferencialines formas

$$\omega^{i_1\ldots i_b}_{j_1\ldots j_a} = \begin{cases} \dfrac{a!}{(b-1)!(a-b+1)!}\delta^{(i_1}_{(j_1}\cdots\delta^{i_{b-1}}_{j_{b-1}}\omega^{i_b)}_{j_b\ldots j_a)}, & \text{jei } b \leqslant a,\\ 0, & \text{jei } b > a, \end{cases} \tag{3}$$

(1) lygčių sistemą galima užrašyti šitaip:

$$dV_I - V_K\omega_I^K = V_{I,k}\omega^k; \tag{1'}$$

čia indeksai I, J, K vadinami viršindeksais, įgyja seriją simetriškų indeksų $(i_1), (i_1 i_2), \ldots, (i_1 \ldots i_p)$, o (3) lygybėmis apibrėžtos formos yra tokios struktūros:

$$d\omega_I^K = \omega_I^L \wedge \omega_L^K + \omega^k \wedge \omega_{Ik}^K. \tag{4}$$

Diferencialinių lygčių sistema

$$\begin{aligned} &\omega^i = 0, \\ &\Theta_I = dV_I - \omega_I^K V_K = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

yra pilnai integruojama ir jos pirmieji integralai yra p-tos eilės atraminių viršvektorių erdvės $V_{n,N}^{(p)}$ lokaliosios koordinatės $\left(N = n + \frac{n(n+1)}{2!} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} + \ldots + \frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{p!}\right)$.

Diferencijuodami išoriniu būdu (5) lygtis, randame formų Θ_I struktūrą:

$$D\Theta_I = \omega_I^K \wedge \Theta_K + \varphi_{I,k}\omega^k, \tag{6}$$

kur $\varphi_{I,k} = V_K\omega_{Ik}^K$.

Su kiekvienu erdvės $V_{n,N}^{(p)}$ tašku (x, v) asocijuojasi dvi erdvės: liestinė vektorinė erdvė $T_{n+N}^{(p)}(x, v)$ ir koliestinė vektorinė erdvė $T_{n+N}^{*(p)}(x, v)$. Jeigu $(\vec{e}_i, \vec{\varepsilon}^I)$ – liestinės erdvės $T_{n+N}^{(p)}(x, v)$ reperis, o $(\vec{e}^i, \vec{\varepsilon}_I)$ – koliestinės erdvės $T_{n+N}^{*(p)}(x, v)$ koreperis, tai jų infinitezimalių transformacijų lygtys yra:

$$\begin{aligned} d\vec{e}_i &= \eta_i^k \vec{e}_k + \psi_{I,i}\vec{\varepsilon}^I, \\ d\vec{\varepsilon}^I &= -\eta_K^I \vec{\varepsilon}^K, \end{aligned} \tag{7}$$

ir

$$\begin{aligned} d\vec{e}^i &= -\eta_k^i \vec{e}^k, \\ d\vec{\varepsilon}_I &= \eta_I^K \vec{\varepsilon}_K + \psi_{I,k}\vec{e}^k, \end{aligned} \tag{8}$$

kur

$$\psi_{I,k} = \varphi_{I,k}\Big|_{\omega^i = \Theta_I = 0}, \qquad \eta_I^K = \omega_I^K = \omega_I^K\Big|_{\omega^i = \Theta_I = 0}.$$

Iš (6) ir (7) formulių matyti, kad erdvė $T_{n+N}^{(p)}(x, v)$ turi invariantinį poerdvį $T_N(x, v)$, apibrėžtą vektoriais $\{\vec{\varepsilon}^I\}$, o koliečiamoji erdvė – invariantinį poerdvį $T_n^*(x, v)$, apibrėžtą vektoriais $\{\vec{e}^i\}$.

2. Erdvės $V_{n,N}^{(p)}$ tiesinės sietys

1. *Natūralioji erdvės* $T_{n+N}^{*(p)}(x,v)$ *normalizacija.* Nagrinėsime erdvės $T_{n+N}^{*(p)}(x,v)$ tokią normalizaciją, kad poerdvis $T_N^{*(p)}(x,v)$ būtų invariantinis. Tokią normalizaciją apibrėšime formomis

$$\widetilde{\Theta}_I = \Theta_I - \Gamma_{I,k}\omega^k, \tag{9}$$

kur objektas $\Gamma_{I,k}$, vadinamas tiesinės sieties objektu, turi tokią struktūrą:

$$d\Gamma_{I,k} - \Gamma_{K,k}\omega_I^K - \Gamma_{I,l}\omega_k^l - \varphi_{I,k} \cong \nabla\Gamma_{I,k} - \varphi_{I,k} = \Gamma_{I,kl}\omega^l + \Gamma'^L_{I,k}\Theta_L, \tag{10}$$

$$\nabla\Gamma_{I,kl} - \Gamma_{K,k}\omega_{Il}^K - \Gamma_{I,p}\omega_{kl}^p - \Gamma'^L_{I,k}\varphi_{L,l} - \varphi_{I,kl} = 0(\operatorname{mod}\omega^i, \Theta_I), \tag{11}$$

$$\nabla\Gamma'^L_{I,k} - \omega^L_{I,k} = 0(\operatorname{mod}\omega^i, \Theta_I). \tag{12}$$

Diferencijuodami (9) lygybes, gauname:

$$d\widetilde{\Theta}_I = \widetilde{\omega}_I^K \wedge \widetilde{\Theta}_K + R_{I,kl}\omega^k \wedge \omega^l + R^{\bar{L}}_{I,k}\widetilde{\Theta}_{\bar{L}} \wedge \omega^k, \tag{13}$$

kur

$$R_{I,kl} = 2\big(\Gamma_{I,[kl]} - \Gamma'^L_{I,[k}\Gamma_{|L|,l]}\big), \tag{14}$$

$$\widetilde{\omega}_I^K = \omega_I^K + \Gamma'^K_{I,p}\omega^p, \tag{15}$$

o indeksai $\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}$ įgija simetrinių indeksų seriją $(i_1 \dots i_{a+1})$, $(i_1 \dots i_{a+1}, i_{a+2}), \dots$, $(i_1 i_2 \dots i_p)$.

Formos $\widetilde{\omega}_I^K$ vadinamos nupjautos viršvektorinės sieties formomis. Diferencijuodami (15) lygybes, gausime 3 viršvektorinės sieties kreivumo objektus. Objektai $R_{I,kl}$ ir $\Gamma'^K_{I,p}$ vadinami papildomo kreivumo objektais.

Taigi įrodėme teoremą:

Teorema. *Erdvės $V_{n,N}^{(p)}$ tiesinės sieties objekto pirmuoju tęsiniu aprėmiama šios erdvės viršvektorinė sietis.*

2. *Specialioji erdvės* $V_{n,N}^{(p)}$ *normalizacija.* Nagrinėsime tokią erdvės $T_{n+N}^{*(p)}(x,v)$ normalizaciją, kad poerdviai, apibrėžti vektoriais $\vec{\varepsilon}_{i_1}, \vec{\varepsilon}_{i_1 i_2}, \dots, \vec{\varepsilon}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ būtų invariantiniai. Tokią normalizaciją apibrėšime formomis

$$\widetilde{\Theta}_I = \Theta_I - \Gamma_I^{K_1}\Theta_{K_1} - \Gamma_{I,k}\omega^k, \tag{16}$$

kur $\Gamma_{j_1 \dots j_a}^{i_1 \dots i_b} = 0$, jei $b \geqslant a$, o I_s, K_s įgyja simetrinių indeksų seriją $(i_1), (i_1 i_2), \dots, (i_1 i_2 \dots i_{p-s})$. Dydžiai $\Gamma_I^{K_1}$ ir $(\Gamma_I^{K_1}, \Gamma_{I,k})$ sudaro diferencialinį-geometrinį objektą šitokios struktūros:

$$\nabla\Gamma_I^{L_1} - \omega_I^{L_1} = \Gamma_{I,k}^{L_1}\omega^k + \Gamma_I^{L_1.K}\Theta_k, \tag{17}$$

$$d\Gamma_{I,k} - \Gamma_{K,k}\nu_I^K - \Gamma_{I,l}\omega_k^l - \Gamma_I^{K_1}\varphi_{K_1,k} - \varphi_{I,k} = \Gamma_{I,kl}\omega^l + \Gamma'^L_{I,k}\Theta_L, \tag{18}$$

kur

$$\nu^{i_1\dots i_b}_{j_1\dots j_a} = \begin{cases} \omega^{i_1\dots i_b}_{j_1\dots j_a}, & \text{jei } b = a, \\ 0, & \text{jei } b \neq a. \end{cases}$$

(16) lygybes galima užrašyti šitaip:

$$\widetilde{\Theta}_I = \Theta_I - \overset{*}{\Gamma}{}^{K_1}_I \widetilde{\Theta}_{K_1} - \overset{*}{\Gamma}_{I,k}\omega^k, \tag{19}$$

kur

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{K_1}_I = \Gamma^{K_1}_I + \Gamma^{L_1}_I \overset{*}{\Gamma}{}^{K_1}_{L_1}, \qquad \overset{*}{\Gamma}_{I,k} = \Gamma_{I,k} + \Gamma^{K_1}_I \overset{*}{\Gamma}_{K_1,k}.$$

Diferencijuodami (19) lygybes, gauname:

$$D\widetilde{\Theta}_I = \tilde{\nu}^K_I \wedge \widetilde{\Theta}_K + \frac{1}{2} R_{I,kj}\omega^k \wedge \omega^j + R^{K_1,L}_I \widetilde{\Theta}_{K_1} \wedge \widetilde{\Theta}_L + R'^L_{I,k}\omega^k \wedge \widetilde{\Theta}_L, \tag{20}$$

kur

$$\tilde{\nu}^{i_1 i_2\dots i_a}_{j_1 j_2\dots j_a} = \nu^{i_1 i_2\dots i_a}_{j_1 j_2\dots j_a} + a\delta^{(i_1}_{(j_1}\dots\delta^{i_{a-1}}_{j_{a-1}} R^{,i_a)}_{j_a),k}\omega^k. \tag{21}$$

o $R_{I,kj}$, $R^{K_1,L}_I$, $R'^L_{I,k}$ – papildomo kreivumo objektai (jų struktūra gana sudėtinga, todėl čia nepateiksime).

Formas $\tilde{\nu}^{i_1\dots i_a}_{j_1\dots j_a}$ vadinsime nupjautos tenzorinės sieties formomis. Diferencijuodami (21) lygybes gausime nupjautinės tenzorinės sieties tris kreivumo objektus. Taigi įrodėme teoremą:

Teorema. *Erdvės $V^{(p)}_{n,N}$ specialiosios tiesinės sieties objekto pirmuoju tęsiniu aprėpiama šios erdvės nupjauta tenzorinė sietis.*

3. Finslerio struktūros atraminių viršvektorių erdvės sietys

Atraminių p-tos eilės viršvektorių erdvė, kurioje apibrėžtas skaliarinės funkcijos laukas $F(x, v)$:

$$\mathrm{d}F = F_i\omega^i + F^I\Theta_I \tag{22}$$

vadinsime Finslerio struktūros atraminių viršvektorių erdve. Ją žymėsime $\mathcal{F}^{(p)}_{n,N}$.

Dalinai pratęsę (22) lygtis, gauname:

$$\nabla F^I = F^I_{,i}\omega^i + F^{I,K}\Theta_K, \tag{23}$$
$$\nabla F^I_{,i} + F^P\omega^I_{P,i} + F^{I,K}\varphi_{K,i} = 0(\operatorname{mod}\omega^i, \Theta_I), \tag{24}$$
$$\nabla F^{I,K} = 0(\operatorname{mod}\omega^i, \Theta_I). \tag{25}$$

Nagrinėsime atvejį, kai $\det ||F^{I,K}|| \neq 0$. Vadinasi, egzistuoja objektas $F_{K,L}$, kad $F_{K,L}F^{I,K} = \delta^I_L$.

Iš (24) ir (25) lygčių išplaukia, kad objekto

$$\Pi_{J,i} = F^L_{,i} F_{L,I} \tag{26}$$

komponentės tenkina diferencialinę lygčių sistemą

$$\nabla \Pi_{I,i} + F_{K,I} F^P \omega^K_{P,i} + \varphi_{I,i} = 0(\operatorname{mod} \omega^i, \Theta_I). \tag{27}$$

Kad iš skaliarinės funkcijos ir jos dalinių tęsinių galėtume sukonstruoti atraminių viršvektorių tiesinę sietį, reikalausime, kad daugdaroje V_n būtų apibrėžta p-tos eilės afinioji sietis: $\Gamma^i_{J,k}(x)$. Iš šios sieties sukonstruojame viršvektorinės sieties objektą:

$$\Gamma^{j_1\ldots j_b}_{i_1\ldots i_a k} = \begin{cases} \dfrac{a!}{(b-1)!(a-b+1)!} \delta^{(j_1}_{(i_1} \ldots \delta^{j_{b-1}}_{i_{b-1}} \Gamma^{j_G}_{i_b\ldots i_a)k}, & \text{jei } b \leqslant a, \\ 0, & \text{jei } b > a. \end{cases}$$

Nesunku įsitikinti, kad objektas

$$\Gamma_{I,i} = -\left(\Pi_{I,i} - F_{K,I} F^P \Gamma^K_{P,i}\right) \tag{28}$$

tenkina diferencialinių lygčių sistemą

$$\nabla \Gamma_{I,i} - \varphi_{I,i} = 0(\operatorname{mod} \omega^i, \Theta_I). \tag{29}$$

$\Gamma_{I,i}$ – tiesinės sieties objektas.

Taigi teisinga teorema:

Teorema. *Jeigu erdvės $\mathcal{F}^{(p)}_{n,N}$ bazėje V_n apibrėžta p-tos eilės afinioji sietis, tai erdvės $\mathcal{F}^{(p)}_{n,N}$ tiesinė sietis aprėpiama objektu $(F^P, F^{;K}_i, F_{I,K}, \Gamma^K_{I,i})$ (27 ir 28 formulės).*

Literatūra

[1] В.И. Близникас, О геометрии некоторых классов оснащенных расслоенных пространств, Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, Вильнюс, 339 (1970).

[2] В.И. Близникас, Дифференциальные уравнения некоторых дифференциально-геометрических объектов, *Liet. Mat. Rink.*, 4(6), 497–501 (1966).

[3] Ю.И. Шинкунас, О связностях пространства опорных сверхвекторов p-го порядка, Из-во Казанского ун-та, Труды геометрического семинара, 132–144 (1975).

Les connexions de l'espace des survecteurs d'appuis de structure finslérienne

J. Šinkūnas

L'espace de survecteurs d'appuis [3] avec le champ de fonction métrique F s'appelle l'espace de survecteurs d'appuis de structure finslérienne $\mathcal{F}^{(p)}_{n,N}$. De la fonction F, ses prolongements partiels et de la connexion affine d'ordre supérieur on a reçu l'object de la connexion linéaire de l'espace $\mathcal{F}^{(p)}_{n,N}$.