LMD mokslo darbai, III tomas, 117–122

Konvergavimo greičio įvertis CRT simetrinėje grupėje

Vytas ZACHAROVAS (VU)

Tarkime, kad turime n-ojo laipsnio keitinių grupę S_n. Kiekvieną šios grupės elementą σ galime vienareikšmiškai (jei neatsižvelgsime į dauginamųjų tvarką) išreikšti nepriklausomų ciklų sandauga, $\sigma = \kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_3$. Pažymėkime $m_k(\sigma)$ (k=1…n)-skaičius ciklų įeinančių į σ skaidinį, kurių ilgis lygus k. Galima parodyti, kad skaičius S_n elementų σ, tokių, kad $m_k(\sigma) = s_k$, yra lygus

$$n!\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{s_j}(s_j!)}.$$

Todel, jeigu grupeje S_n apibrėšime tikimybinį matą ν_θ taip, kad $\nu_\theta(\sigma) = \theta^{k(\sigma)}/\theta_{(n)}$ kur $k(\sigma) = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$, o $\theta_{(n)} = \theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)$. Tai tuomet

$$\nu_\theta\big(m_1(\sigma) = s_1, \ldots, m_n(\sigma) = s_n\big) = \frac{n!}{\theta_{(n)}}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\theta}{j}\right)^{s_j}\frac{1}{s_j!}.$$

Tai yra taip vadinamoji Ewens'o formulė. Tuo atveju, kai $\theta = 1$, gauname, kad $\nu(\sigma) = \frac{1}{n!}$.
1996 m. E.Manstavičius įrodė tokią teoremą.

Teorema. *Tarkime, $\theta = 1$, ir $a_k = a_k^n$, yra seka konstantų, tenkinančių sąlygą $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{k} = 1$. Tuomet*

$$\sup_{x\in R}\left|\nu_n(x) - \Phi(x) - \frac{D_n x}{2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\right| << L_n.$$

Čia $\nu_n(x) = P\big(m_1(\sigma)a_1 + \ldots + m_n(\sigma)a_n - A(n) < x)\big)$,

$$D_n = \sum_{\substack{1\leqslant k,l\leqslant n\\ k+l>n}}\frac{a_k a_l}{kl}, \quad L_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{|a_k|^3}{k}, \quad A(n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}.$$

Išvada. Turime, kad

$$R_n := \sup_{x\in R}|\nu_n(x) - \Phi(x)| << L_n^{2/3}.$$

Be to, egzistuoja tokia seka konstantų a_k^n, tenkinančių atitinkamą normavimo sąlygą, kad $L_n = o(1)$

$$R_n >> L_n^{2/3}.$$

Mūsų tikslas bus perskaičiuoti minėtuosius E. Manstavičiaus rezultatus atvejui, kai $\theta \geqslant 1$. Tai yra įrodyti tokią teoremą. Pažymėkime $C_n = \frac{\theta_{(n)}}{n!}$.

Teorema 1. *Tarkime* $\theta \geqslant 1$, *be to,* $\theta \sum_{k=1}^{1} \frac{a_k^2}{k} = 1$. *Tuomet*

$$R'_n := \sup_{x \in R} \left| \nu_n(x) - \Phi(x) + \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(m_n + x \frac{d_n - 1}{2} \right) \right| << L_n.$$

Kur $L_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|^3}{k}$, $A(n) = \theta \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$,

$$m_n = M\big(h_n(\sigma) - A(n)\big), \quad d_n = M\big(h_n(\sigma) - A(n)\big)^2.$$

Išvada. Tarkime, kad $\theta > 1$, tada turime, kad

$$R_n := \sup_{x \in R} |\nu_n(x) - \Phi(x)| << L_n^{1/3}.$$

Be to, egzistuoja tokia seka konstantų a_k^n, tenkinančių atitinkamą normavimo sąlygą, kad $L_n = o(1)$

$$R_n >> L_n^{1/3}.$$

Apskaičiuosime a. d $h_n(\sigma) = m_1(\sigma)a_1 + m_2(\sigma)a_2 + \ldots + m_n(\sigma)a_n$ charakteristinę f-ją.

$$M_n = \sum_{\sigma \in S_n} \exp\{ith_n(\sigma)\} \frac{\theta^{k(\sigma)}}{\theta_{(n)}} = \frac{1}{C_n} \sum_{m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n = n} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\theta f(j)}{j} \right)^{m_j} \frac{1}{m_j!}$$

čia ir toliau $f(k) = \exp\{ita_k^n\}$.

Nesunku matyti, kad $M_n C_n$ yra lygys koeficientui prie n-ojo laipsnio funkcijos

$$F(z) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \theta \frac{f(j)}{j} z^j \right\}.$$

Teiloro skleidinyje. Toliau laikysime, kad $f(k) = 1$, kai $k > n$.

Pagalbiniai rezultatai

Pažymėkime

$$L(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k) - 1}{k} z^k, \qquad \rho(n, p) = \left(\sum_{k \leqslant n} \frac{|f(k) - 1|^p}{k} \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$I_k(n,\theta) = \frac{\theta^k}{2\pi i C_n}\int_{|z|=r}\frac{(L(z)-L(1))^k}{(1-z)^\theta z^{n+1}}\mathrm{d}z.$$

Yra žinoma, kad $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\theta-1}}{C_n} = \Gamma(\theta)$.

Teorema 2. *Tarkime, kad $\theta > 1/2$, $p > \max\{1, \frac{1}{\theta}\}$. Tada, jei $\rho = \rho(n,p) < \delta(\theta,p)$, tai*

$$M_n = \exp\{\theta L(1)\}\left(1 + \sum_{k=1}^{N-1}\frac{I_k(n,\theta)}{k!} + O(\rho^N + n^{-c})\right).$$

Čia $N > 1$, $c > 0$.

Įrodymas. Šios teoremos įrodymas yra visiškai analogiškas E. Manstavičiaus [1] 3 teoremos įrodymui.

Pažymekime

$$(\mu_n)^2 := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(k)-1|^2, \qquad E(u) := \exp\left\{2\sum_{\substack{|f(k)-1|>u\\ 1\leqslant k\leqslant n}}\frac{|f(k)-1|}{k}\right\}.$$

Sekančios lemos įrodymą galima rasti [1] darbe.

Lema 1.

$$\exp\{|L(z)-L(1)|\} <<_u E(u)\left|\frac{1-z}{1-r}\right|^{4u/\pi},$$

čia $z = re^{it}$, kur $r = e^{\frac{-1}{n}}$, ir $u \geqslant 0$.

Teorema 3.

$$M_n = \exp\{\theta L(1)\}\left(1 + O\left(E^\theta(u)\left(\mu_n + \frac{1}{n}\right)^{\min\{1,\theta-\frac{4u}{\pi}\}}\right)\right)$$

jei $\theta > 0$, ir $\theta - \frac{4u}{\pi} > 0$, $u > 0$.

Įrodymas. Pritaikę Koši formulę, gauname

$$M_n = \frac{1}{2\pi i n C_n}\int_{|z|=r}\frac{F'(z)}{z^n}\mathrm{d}z,$$

$$M_n = \frac{\theta\exp\{\theta L(1)\}}{2\pi i n C_n}\int_{|z|=r}\frac{\exp\{\theta(L(z)-L(1))\}}{(1-z)^\theta z^n}\left(\frac{1}{1-z} + L'(z)\right)\mathrm{d}z.$$

Įvertinsime integralą kaip ir [2] darbe

$$J_3 := \frac{1}{2\pi i n C_n} \int\limits_{|z|=r} \frac{\exp\{\theta(L(z)-L(1))\}}{(1-z)^\theta z^n} L'(z)\mathrm{d}z.$$

Šis integralas yra lygus n-ajam koeficientui f-jos $\exp\left\{\theta\sum_{k=1}^n \frac{f(k)}{k}z^k\right\} L'(z)$ Teiloro skleidinyje. Nesunku matyti, kad jis neviršija n-ojo koeficiento f-jos $\frac{1}{(1-z)^\theta}\sum_{k=1}^n |f(k) - 1|z^{k-1}$ Teiloro skleidinyje. Todėl

$$J_3 \leqslant \frac{\theta}{nC_n}\sum_{k=1}^n |f(k)-1|C_{n-k} << (\mu_n)^{\min\{1,\theta-\frac{4u}{\pi}\}}.$$

Pažymekime $l = \left\{z : |z| = r = e^{-\frac{1}{n}}\right\}$, $l_3 = \left\{z \in l : |\tau| \leqslant \frac{K}{n}\right\}$, $K^{-1} = \max\left\{\mu_n, \frac{1}{n}\right\}$, $l_4 := l\backslash l_3$. Tada

$$J_4 := \frac{1}{nC_n}\int_{l_4} \frac{|\exp\{\theta(L(z)-L(1))\}|+1}{|1-z|^{\theta+1}z^n}|\mathrm{d}z| << \frac{1}{K^\theta} + \frac{E^\theta(u)}{K^{\theta-\frac{4u}{\pi}}} << \frac{E^\theta(u)}{K^{\theta-\frac{4u}{\pi}}}.$$

Turime, kad $|L(z) - L(1)| \leqslant n\mu_n|1-z|$, todėl

$$J_5 := \frac{1}{nC_n}\int_{l_3} \frac{|L(z)-L(1)||\exp\{\theta(L(z)-L(1))\}|}{|1-z|^{\theta+1}}|\mathrm{d}z| << \mu_n E^\theta(u)K^{1-\theta+\frac{4u}{\pi}}.$$

Is čia gauname, kad

$$M_n = \exp\{\theta L(1)\}\big(1 + O(J_3 + J_4 + J_5)\big).$$

Įstatę atitinkamus J_3, J_4, ir J_5 įverčius ir gauname teoremos tvirtinimą.

Teorema įrodyta.

Apskaičiuosime dydžio $h(\sigma)$ du pirmuosius momentus. Kadangi

$$M_n = \frac{1}{2\pi i C_n}\int_{|z|=r} \frac{\exp\{\theta L(z)\}}{z^{n+1}(1-z)^\theta}\mathrm{d}z$$

tai, dferencijuodami šią išraišką po integralo ženklu, gauname

$$Mh(\sigma) = \frac{\theta}{C_n}\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k}C_{n-k},$$

$$Mh^2(\sigma) = \frac{\theta}{C_n}\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{k}C_{n-k} + \frac{\theta^2}{C_n}\sum_{\substack{1\leqslant k,l\leqslant n\\ k+l\leqslant n}} \frac{a_k a_l}{kl}C_{n-k-l}.$$

Kadangi, kai $\theta > 1$ turime kad

$$\left|\frac{C_{n-k}}{C_n} - 1\right| << \frac{k}{n}, \quad \ln\frac{C_{n-k}C_{n-l}}{C_{n-k-l}C_n} << \ln\left(1 + \frac{kl}{n(n-k-l)}\right) + \frac{1}{n-k-l}$$

tai pasinaudoję šiais įverčiais gauname, kad $D(h(\sigma)) = 1 + O(L_n^{\frac{2}{3}})$. Iš čia turime, kad $M(h(\sigma) - A(n))^2 = 1 + O(L_n^{\frac{2}{3}})$.

1 teoremos įrodymas. 2 teoremoje paimame N=3.

Kadangi $f(k) - 1 = ita_k + R(ta_k) = ita_k - \frac{t^2}{2}a_k^2 + R_1(ta_k)$, kur $|R(ta_k)| \leqslant \frac{|ta_k|^2}{2}$ ir $|R_1(ta_k)| \leqslant \frac{|ta_k|^3}{6}$, tai, kai $\rho \leqslant \delta(\theta)$.

$$\begin{aligned}
&I_1(n,\theta) + \frac{I_2(n,\theta)}{2} = m_n it + (it)^2\frac{d_n - 1}{2} \\
&+it\theta^2 \sum_{\substack{1\leqslant k,l\leqslant n\\ k+l\leqslant n}} \frac{a_l R(a_k t)}{kl}\frac{C_{n-k-l} - C_{n-k}}{C_n} - it\theta^2 \sum_{\substack{1\leqslant k,l\leqslant n\\ k+l> n}} \frac{a_l R(a_k t)}{kl}\frac{C_{n-k}}{C_n} \\
&+\frac{\theta^2}{2}\left[\sum_{\substack{1\leqslant k,l\leqslant n\\ k+l\leqslant n}} \frac{R(a_k t)R(a_l t)}{kl}\frac{C_{n-k-l} - C_{n-k}}{C_n} - \sum_{\substack{1\leqslant k,l\leqslant n\\ k+l> n}} \frac{R(a_l t)R(a_k t)}{kl}\frac{C_{n-k}}{C_n}\right] \\
&-\theta it m_n \sum_{k=1}^{n} \frac{R(a_k t)}{k} + \frac{\theta^2}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{R(a_k t)}{k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{R(a_k t)}{k}\left(1 - \frac{C_{n-k}}{C_n}\right)\right) \\
&+O(L_n|t|^3) = itm_n + (it)^2\frac{d_n - 1}{2} + O\big(L_n(|t|^3 + |t|^6)\big) \\
&= S_n(t) + O\big(L_n(|t|^3 + |t|^6)\big).
\end{aligned}$$

Todel kai $L_n^{-\frac{1}{3}}\delta^{\frac{1}{3}} \geqslant |t| \geqslant \frac{1}{n^{c/2}}$ turime, kad

$$\phi_n(t) := \mathrm{e}^{-A(n)it}M_n = \mathrm{e}^{-t^2/2}\big(1 + S_n(t)\big) + O\big(\mathrm{e}^{-t^2/2}(|t|^3 + |t|^9)L_n\big).$$

nes $\rho \leqslant L_n|t|^3$, be to $L_n >> \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$. Taip pat turime, kad

$$\phi_n(t) - 1 << |t|\left(M(h(\sigma) - A(n))^2\right)^{1/2} << |t|.$$

Grubiai įvertinę dydžius įeinančius į formulę, gautą 3 teoremoje, kai

$$|t| \leqslant T := \frac{1}{2L_n}\left(\frac{\theta}{6} + \frac{2\theta}{u^2}\right)$$

gauname

$$|\phi_n(t)| << \exp\left\{-\frac{t^2}{2} + \theta\frac{|t|^3}{6}L_n + \frac{2\theta}{u^2}|t|^3 L_n\right\} \leqslant \mathrm{e}^{-t^2/4}.$$

Pritaikę apibendrintą Eseno nelygybę, gauname

$$R_n' << \int_{|t|\leqslant T} \frac{\left|\phi_n(t) - \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + S_n(t)\right)\right|}{|t|}\mathrm{d}t + \frac{1}{T}.$$

Suskaidę integravimo intervalą į tris dalis

$$|t| \leqslant \frac{1}{n^{c/2}}, \quad \frac{1}{n^{c/2}} < |t| < \delta^{\frac{1}{3}} L_n^{-\frac{1}{3}}, \quad \delta^{\frac{1}{3}} L_n^{-\frac{1}{3}} \leqslant |t| \leqslant T$$

ir pritaikę atitinkamus įverčius, gauname teoremos teiginį. Teorema įrodyta.

Išvados įrodymas. Kadangi $m_n << L_n^{1/3}$, $d_n - 1 << L_n^{2/3}$ tai pritaike šiuos įverčius 1 teoremoje, gausime

$$R_n << L_n^{1/3}.$$

Paėmę

$$a_k^n = \frac{c_n}{\ln^{\frac{1}{2}} n}\left(1 + \sqrt{\frac{k}{n}} \ln^{\frac{5}{12}} n\right),$$

kur c_n parenkamas taip, kad būtų $\theta \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{n2}}{k} = 1$; gausime, kad $|m_n| >> L_n^{1/3}$, ir $L_n = o(1)$. Pasinaudoje 1 teorema, gausime, kad šiai sekai dydžių a_k^n bus

$$R_n >> L_n^{1/3}.$$

Literatūra

[1] E. Manstavičius, The Berry-Essen bound in the theory of random permutations, *The Ramanujan J.*, **2**, 185–199 (1998).

[2] E. Manstavičius, Decomposable mappings on combinatorial structures. Analytic approach. Preprint 98–15, VU Department of Mathematics (1999).

Central limit theorem in the symmetric group

V. Zacharovas

In this work we investigate a rate of convergence of sums of random variables defined on a symetric group S_n, when the probability measure on S_n is defined by the Ewens sampling formula with parametter θ. Using the results obtained by E. Manstavičius in paper [1] for the case when $\theta = 1$, we obtain their analogs, when $\theta > 1$, thus estimating the closenes of distribution of $h(\sigma)$ to normal distribution.