Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 458–463

Normuotų maksimumų sandaugos asimptotika

Algimantas AKSOMAITIS, Robertas VILKAS
el.-paštas: vilkas@migla.ktu.lt

1. Įvadas

Tarkime, kad

$$(X_1, \dots, X_N) \quad \text{ir} \quad (Y_1, \dots, Y_N)$$

yra dvi nepriklausomos paprastosios atsitiktinės imtys iš tolydžiųjų generalinių aibių su pasiskirstymo funkcijom is F_X ir F_Y. Imties tūris N yra atsitiktinis dydis ir nepriklausantis nuo visų X_i ir Y_i. Šiame darbe N bus pasiskirstęs pagal geometrinį dėsnį su parametru $1/n$ arba bus determinuotas (pastaruoju atveju vietoj N rašysime n).

Pažymėkime:

$$Z_{1,N} = \max(X_1, \dots, X_N), \quad Z_{2,N} = \max(Y_1, \dots, Y_N).$$

Straipsnyje [4] pateikiamas intensyvių vidinių bangų modelis, kuriame tiriamas banginio proceso amplitudės skirstinys. Tame modelyje amplitudė yra išreiškiama dviejų nepriklausomų atsitiktinių maksimumų sandauga $Z_{1,n}Z_{2,n}$.

Darbe [2] buvo tiriama skirstinių asimptotika, kai tiesiškai normuojame sandaugą $Z_{1,N}Z_{2,N}$:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{Z_{1,N}Z_{2,N} - a_n}{b_n} < z\right) = A(z).$$

Buvo duotas atsakymas, kai $X_i \sim T(0,1)$, $Y_i \sim T(0,1)$. Taip pat buvo surastos tokios konstantų sekos $\{a_{i,n},\ n \in N\}$, $\{b_{i,n},\ n \in N\}$ $(i = \overline{1 \dots n})$ su kuriomis $A(z)$ būtų neišsigimusi.

Šiame darbe tiriame skirstinių asimptotiką, kai tiesiškai normuojame ne pačią sandaugą $Z_{1,N}Z_{2,N}$, o kiekvieną dauginamąjį atskirai:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{Z_{1,N} - a_{1,n}}{b_{1,n}} \cdot \frac{Z_{2,N} - a_{2,n}}{b_{2,n}} < z\right) = B(z). \tag{1}$$

2. Baziniai teiginiai. Teorema

Pažymėkime:

$$\overset{o}{Z}_{1,N} = \frac{Z_{1,N} - a_{1,n}}{b_{1,n}}, \quad \overset{o}{Z}_{2,N} = \frac{Z_{2,N} - a_{2,n}}{b_{2,n}}.$$

Dviejų nepriklausomų tolydžiųjų atsitiktinių dydžių X ir Y sandaugos $U = X \cdot Y$ pasiskirstymo funkcija ([1]) :

$$P(U < z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) p_Y(t/x) \frac{1}{|x|} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Yra žinomi visi galimi neišsigimę atsitiktinių dydžių $\overset{o}{Z}_{i,n}$ $(i = 1, 2)$ skirstiniai ([3]). Jų yra tik trys tipai:

$$\begin{aligned} H_{i,1}(x) &= \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \exp\left(-x^{-\gamma_{i,1}}\right), & x > 0, \end{cases} \\ H_{i,2}(x) &= \begin{cases} \exp\left(-(-x)^{\gamma_{i,2}}\right), & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \\ H_{i,3}(x) &= \exp(-\exp(-x)), \quad x \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Jei imties tūris N yra pasiskirstęs pagal geometrinį dėsnį

$$P(N = k) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}, \quad k \geqslant 1, \tag{4}$$

tai, remiantis (3) ir pilnosios tikimybės formule, gautume, kad visi galimi neišsigimę atsitiktinių dydžių $\overset{o}{Z}_{i,N}$ $(i = 1, 2)$ ribiniai skirstiniai yra šie:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{i,1}(x) &= \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{1 + x^{-\gamma_{i,1}}}, & x > 0, \end{cases} \\ \bar{H}_{i,2}(x) &= \begin{cases} \dfrac{1}{1 + (-x)^{\gamma_{i,2}}}, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \\ \bar{H}_{i,3}(x) &= \frac{1}{1 + \exp(-x)}, \quad x \in \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{5}$$

Taip pat žinomos ir konstantų sekos $\{a_{i,n},\ n \in \mathbf{N}\}$, $\{b_{i,n},\ n \in \mathbf{N}\}$, su kuriomis gaunami šie neišsigimę ribiniai skirstiniai.

Pasinaudoję (2), gauname visas galimas ribinių skirstinių funkcijas:

$$B_0(z) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\overset{o}{Z}_{1,n}\cdot\overset{o}{Z}_{2,n} < z\right) = \int\limits_{-\infty}^{z}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H'_{1,k}(x)\cdot H'_{2,j}\left(\frac{t}{x}\right)\cdot\frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{6}$$

$$B_1(z) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\overset{o}{Z}_{1,N}\cdot\overset{o}{Z}_{2,N} < z\right) = \int\limits_{-\infty}^{z}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \bar{H}'_{1,k}(x)\cdot\bar{H}'_{2,j}\left(\frac{t}{x}\right)\cdot\frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{7}$$

(Simboliais H' ir $\bar{H}'$ pažymėjome atitinkamus pasiskirstymo funkcijas H ir $\bar{H}$ tankius).

Čia iš viso gali būti 6 (ne 9 todėl, kad sandauga yra komutatyvi) skirtingi ribiniai skirstiniai. Integralinis jų pavidalas yra nepatogus tiek teoriniams tyrimams, tiek praktiniams taikymams. Šie integralai yra ne visada suintegruojami, t.y. ne visada išreiškiami elementariosiomis funkcijomis. Atlikus gilesnę analizę buvo pastebėta, kad yra tokių atvejų, kai suintegruoti tiek (6), tiek (7) pavyksta. Ir netgi ištisai funkcijų klasei.

Teorema. *Jei* $P(\overset{o}{Z}_{1,n} < x) \to H_{1,1}(x)$, $P(\overset{o}{Z}_{2,n} < x) \to H_{2,2}(x)$ *kai* $n \to \infty$ *ir* $\gamma_{1,1} = \gamma_{2,2} = \gamma$, *tai*

$$B_0(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+(-z)^\gamma}, & z \leqslant 0; \\ 1, & z > 0. \end{cases}$$

Jei imties tūrio $\mathbf{N}$ *tikimybių skirstinys yra* (4), *tai*

$$B_1(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-(-z)^\gamma}\left(1+\dfrac{(-z)^\gamma}{1-(-z)^\gamma}\ln(-z)^\gamma\right), & z \leqslant 0; \\ 1, & z > 0. \end{cases}$$

Teoremos įrodymas. Kai $z < 0$, pagal (3) ir(6) formules ($i = 1,\ j = 2$) turime:

$$B_0(z) = \int\limits_{-\infty}^{z}\int\limits_{0}^{+\infty} \gamma x^{-\gamma-1}\exp\left(-x^{-\gamma}\right)\cdot\gamma\left(-\frac{t}{x}\right)^{\gamma-1}\exp\left(-\left(-\frac{t}{x}\right)^\gamma\right)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$= \gamma^2\int\limits_{-\infty}^{z}(-t)^{\gamma-1}\left(\int\limits_{0}^{+\infty} x^{-1-2\gamma}\exp\left(-\left(1+(-t)^\gamma\right)x^{-\gamma}\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t.$$

Skaičiuojame vidinį integralą:

$$\int_0^{+\infty} x^{-1-2\gamma} \exp\left(-\left(1+(-t)^\gamma\right) x^{-\gamma}\right) \mathrm{d}x$$
$$= \left\{y = (1+(-t)^\gamma)\, x^{-\gamma},\ x = (1+(-t)^\gamma)\, y^{-\frac{1}{\gamma}}\right\}$$
$$= \int_{+\infty}^{0} (1+(-t)^\gamma)^{-\frac{1+2\gamma}{\gamma}} y^{\frac{1+2\gamma}{\gamma}} \exp(-y)\, (1+(-t)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} \left(-\frac{1}{\gamma}\right) y^{-1-\frac{1}{\gamma}} \mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{\gamma\,(1+(-t)^\gamma)^2} \int_0^{+\infty} y \cdot e^{-y} \mathrm{d}y = \frac{\Gamma(2)}{\gamma\,(1+(-t)^\gamma)^2} = \frac{1}{\gamma\,(1+(-t)^\gamma)^2}.$$

Tada

$$B_0(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{\gamma(-t)^{\gamma-1}}{(1+(-t)^\gamma)^2} \mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{z} \frac{d\,(1+(-t)^\gamma)}{(1+(-t)^\gamma)^2} = \frac{1}{1+(-z)^\gamma}.$$

Toliau, tarkime, kad N pasiskirstęs pagal geometrinį dėsnį. Kai $z < 0$, pagal (5) ir(7) formules ($i = 1,\ j = 2$) turime:

$$B_1(z) = \int_{-\infty}^{z} \int_0^{+\infty} \frac{-\gamma \cdot x^{-\gamma-1}}{(1+x^{-\gamma})^2} \cdot \frac{\gamma \cdot x^{\gamma+1}(-t)^{\gamma-1}}{(x^\gamma + (-t)^\gamma)^2} \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$= -\gamma^2 \int_{-\infty}^{z} (-t)^{\gamma-1} \int_0^{+\infty} \frac{x^{2\gamma-1}}{(x^\gamma+1)^2 (x^\gamma + (-t)^\gamma)^2} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \{y = x^\gamma\}$$
$$= -\gamma \int_{-\infty}^{z} (-t)^{\gamma-1} \int_0^{+\infty} \frac{y}{(y+1)^2 (y+(-t)^\gamma)^2} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \{a = (-t)^\gamma\}$$
$$= \int_{(-z)^\gamma}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{y}{(y+1)^2 (y+a)^2} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}a.$$

Nesunku įsitikinti, kad

$$\int \frac{y}{(y+1)^2(y+a)^2} \mathrm{d}y = -\frac{(a+1)y+2a}{(a-1)^2(y+a)(y+1)} + \frac{a+1}{(a-1)^3} \ln \frac{y+1}{y+a}.$$

Vadinasi

$$\int_0^{+\infty} \frac{y}{(y+1)^2(y+a)^2} \mathrm{d}y = \frac{-2}{(a-1)^2} + \frac{a+1}{(a-1)^3} \ln a.$$

Kadangi

$$\int\left(\frac{-2}{a-1}+\frac{a+1}{(a-1)^3}\ln a\right)\mathrm{d}a=\frac{1}{a-1}-\frac{a}{(a-1)^2}\ln a,$$

tai

$$\int\limits_{(-z)^\gamma}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{y}{(y+1)^2(y+a)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}a=\frac{1}{1-(-z)^\gamma}\left(1+\frac{(-z)^\gamma}{1-(-z)^\gamma}\ln(-z)^\gamma\right).$$

Teorema įrodyta.

3. Komentarai

Darbe [2] buvo tirtas atvejis, kai

$$F_X(x)=x,\quad 0<x<1;\quad F_Y(y)=y,\quad 0<y<1.$$

Šis atvejis nepatenka teoremoje pateiktai skirstinių klasei. Todėl, palyginimui su [2] darbu, labai įdomu buvo rasti funkciją $B_0(z)$ šiam atvejui.

Čia ribinės pasiskirstymo funkcijos yra $H_{1,2}(x)$ ir $H_{2,2}(y)$ ir $\gamma_{12}=\gamma_{22}=1$. Normavimo konstantos $a_{1,n}=a_{2,n}=1$, $b_{1,n}=b_{2,n}=1/n$. Naudojantis (3) ir (6) formule gauta, kad

$$B_0(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ 1-\int\limits_0^{+\infty}\exp\left(-x-\dfrac{z}{x}\right)\mathrm{d}x, & z>0.\end{cases}$$

Ši cilindrinė funkcija neturi elementariosios išraiškos.

Palyginimui užrašysime ir [2] darbe gautos šiam atvejui ribinės funkcijos $A(z)$ išraišką:

$$A_0(z)=\begin{cases}(1-z)\mathrm{e}^z, & z\leqslant 0,\\ 1, & z>0,\end{cases}$$

(čia vietoj A pažymėjome A_0 todėl, kad norėjosi išlaikyti panašų į funkcijos B žymėjimą, t.y. indeksas nulis reiškia, kad turime atvejį, kai imties tūris N yra determinuotas). Taigi, ribiniai sandaugos $Z_{1,n}Z_{2,n}$ skirstiniai ženkliai priklauso nuo to, kaip normuojame (nors ir tiesiškai!) sandaugą.

Literatūra

[1] M. Fišas, *Tikimybių teorija ir matematinė statistika*, Mintis, Vilnius (1968).

[2] A. Aksomaitis, R. Vilkas, *Lietuvos matematikų draugijos mokslo darbai*, Technika, Vilnius, pp. 345–348 (1998).

[3] Я. Галамбош, *Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик*, Наука, Москва (1984).

[4] М.С. Тихов, *Статистический анализ моделей интенсивных внутренних волн. Обозрение прикладной и промышленной математики*, **4**, вып. 3 "ТВП" Москва, с. 412–414 (1997).

[5] E.N. Polinovsky, M.S. Tikhov, O.S. Kiyashko, Prognosis of large-amplitude internal waves on base a probability laws, In: *Proceedings of the Sydney International Statistical Congress*, Sydney, p. 76 (1996).

Asymptotics for the product of normed maxima

A. Aksomaitis, R. Vilkas

Asymptotical analysis for the product of normed maxima of random variables is presented. One particular case for samples of size N, having geometrical distribution, is discussed.