Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 453–457


# Maksimumų ir minimumų bendrųjų skirstinių asimptotiniai tyrimai

Algimantas AKSOMAITIS (KTU)
*el. paštas: aksoma@fmf.ktu.lt*

## 1. Įvadas

Sakykime, kad yra dvi a.d. sekos: $\{X_j,\ j \geqslant 1\}$ – nepriklausomi a.d. su $\mathbf{P}(X_j \leqslant x) = F(x)$, $j \geqslant 1$ ir $\{N_n,\ n \geqslant 1\}$ – a.d., įgyjantieji tik sveikas teigiamas reikšmes su $\mathbf{P}(N_n \leqslant x) = A_n(x)$, $n \geqslant 1$. Atsitiktiniai dydžiai $X_j$ ir $N_n$ su visais $j \geqslant 1$ ir $n \geqslant 1$ yra nepriklausomi.

Pažymėkime:

$$\begin{aligned} Z_n &= \max(X_j,\ j = \overline{1,n}), \quad Z_{N_n} = \max(X_j,\ j = \overline{1,N_n}), \\ W_n &= \min(X_j,\ j = \overline{1,n}), \quad W_{N_n} = \min(X_j,\ j = \overline{1,N_n}). \end{aligned}$$

Tarkime, kad yra tokios realiųjų skaičių sekos: $\{u_n,\ n \geqslant 1\}$ ir $\{v_n,\ n \geqslant 1\}$, su kuriomis

$$\begin{aligned} \tau_n &= n\big(1 - F(u_n)\big) \to \tau, \quad 0 \leqslant \tau < \infty, \\ \gamma_n &= nF\big(v_n)\big) \to \gamma, \quad 0 \leqslant \gamma < \infty, \end{aligned}$$

kai $n \to \infty$.

Tada ([1], 1.8.2 teorema)

$$\mathbf{P}(Z_n \leqslant u_n,\ W_n \leqslant v_n) \to G(\tau, \gamma), \quad \text{kai} \quad n \to \infty; \tag{1}$$

čia

$$G(\tau, \gamma) = \mathrm{e}^{-\tau}\big(1 - \mathrm{e}^{-\gamma}\big).$$

Mus domins konvergavimo greičio įvertis (1) sąryšyje. Maksimumų konvergavimo greičio įvertis

$$\big|\mathbf{P}(Z_n \leqslant u_n) - \mathrm{e}^{-\tau}\big| \leqslant \Delta_n(\tau) \tag{2}$$

yra pateiktas [1] (2.4.2. teorema), o taip pat šio straipsnio (5) sąryšyje.

Toliau, tarkime, kad

$$A_n(nx) = \mathbf{P}\Big(\frac{N_n}{n} \leqslant x\Big) \to A(x), \tag{3}$$

kai $n \to \infty$. Tada, esant (1) ir (3) sąlygoms, mes įrodysime, kad

$$\mathbf{P}(Z_{N_n} \leqslant u_n,\ W_{N_n} \leqslant v_n) \to \psi(\tau, \gamma), \tag{4}$$

kai $n \to \infty$. Pateiksime $\psi(\tau, \gamma)$ struktūrą ir ištirsime konvergavimo greitį (4) sąryšyje. Tai bus [3] publikacijos plėtinys bendrųjų skirstinių atvejui.

## 2. Rezultatų formuluotė ir įrodymas

**1 teorema.**

$$\Delta_n(\tau, \gamma) = \left|\mathbf{P}(Z_n \leqslant u_n,\ W_n \leqslant v_n) - G(\tau, \gamma)\right| \leqslant \Delta_n(\tau) + \Delta_n(\tau, \gamma).$$

*Įvertis* $\Delta_n(\tau)$ *pateiktas* [1], *o*

$$\Delta_n(\tau, \gamma) \leqslant \frac{0,3}{n-1} + \mathrm{e}^{-(\tau+\gamma}\left(|\tau + \gamma - \tau_n - \gamma_n| + (\tau + \gamma - \tau_n - \gamma_n)^2\right),$$

*jeigu tik*

$$\tau + \gamma - \tau_n - \gamma_n \leqslant \ln 2.$$

**2 teorema.** *Tarkime, kad yra* (1) *ir* (3) *sąlygos. Tada galioja* (4) *ir*

$$\psi(\tau, \gamma) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau x}(1 - \mathrm{e}^{-\gamma x})\,\mathrm{d}A(x).$$

*Be to, galioja įvertis*

$$\begin{aligned}
\Delta_{N_n}(\tau, \gamma) &= \left|\mathbf{P}(Z_{N_n} \leqslant u_n,\ W_{N_n} \leqslant v_n) - \psi(\tau, \gamma)\right| \\
&\leqslant \Delta_n(\tau) \int_0^\infty x \rho_n(\tau, x)\,\mathrm{d}A_n(nx) + \Delta_n(\tau, \gamma) \int_0^\infty x \rho_n(\tau, \gamma, x)\,\mathrm{d}A_n(nx) \\
&\quad + \int_0^\infty \tilde{\Delta}_n(x)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\tau x}(1 - \mathrm{e}^{-\gamma x});
\end{aligned}$$

*čia*

$$\rho_n(\tau, x) = \max\left(\left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^{n(x-1)}, \mathrm{e}^{-\tau(x-1)}\right),$$

$$\rho_n(\tau, \gamma, x) = \max\left(\left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^{n(x-1)}, \mathrm{e}^{-(\tau+\gamma)(x-1)}\right),$$

$$\tilde{\Delta}_n(x) = \left|A_n(nx) - A(x)\right|.$$

1 *teoremos įrodymas.* Galioja sąryšiai

$$\mathbf{P}(Z_n \leqslant u_n,\ W_n \leqslant v_n) = \begin{cases} F^n(u_n), & u_n \leqslant v_n, \\ F^n(u_n) - \big(F(u_n) - F(v_n)\big)^n, & u_n > v_n \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^n, & \tau_n + \gamma_n \geqslant n, \\ \left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^n, & \tau_n + \gamma_n < n. \end{cases}$$

Mus domins atvejis, kai $u_n > v_n$, nes priešingu atveju ($u_n \leqslant v_n$) įvertis gaunamas identiškas (2) (mes jį pateiksime).

Turime:

$$\left|\left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^n - G(\tau, \gamma)\right| \leqslant \left|\left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^n - \mathrm{e}^{-\tau}\right|$$
$$+ \left|\mathrm{e}^{-(\tau+\gamma)} - \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^n\right| \leqslant \Delta_n(\tau) + \tilde{\Delta}_n(\tau, \gamma).$$

Pasinaudoję [1], (314 psl.), gauname:

$$\Delta_n(\tau) = \frac{0,3}{n-1} + \mathrm{e}^{-\tau}\big(|\tau - \tau_n| + (\tau - \tau_n)^2\big), \tag{5}$$

kai $\tau - \tau_n \leqslant \ln 2$.

Ta pačia metodika, gauname, kad ir

$$\tilde{\Delta}_n(\tau, \gamma) = \frac{0,3}{n-1} + \mathrm{e}^{-(\tau+\gamma)}\Big(|\tau + \gamma - \tau_n - \gamma_n| + (\tau + \gamma - \tau_n - \gamma_n)^2\Big),$$

kai

$$\tau + \gamma - \tau_n - \gamma_n \leqslant \ln 2.$$

2 *teoremos įrodymas.* Panaudoję pilnosios tikimybės formulę, gauname:

$$\mathbf{P}(Z_{N_n} \leqslant u_n,\ W_{N_n} \leqslant v_n)$$
$$= \begin{cases} \sum\limits_j \left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^j \mathbf{P}(N_n = j), & u_n \leqslant v_n, \\ \sum\limits_j \left(\left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^j - \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^j\right) \mathbf{P}(N_n = j), & u_n > v_n, \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \int\limits_0^\infty \left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^{nx} \mathrm{d}A_n(nx), & u_n \leqslant v_n, \\ \left(\int\limits_0^\infty \left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^{nx} - \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^{nx}\right) \mathrm{d}A_n(nx), & u_n > v_n. \end{cases}$$

Pakankamai dideliems $n$ gausime, kad $u_n > v_n$ ir todėl

$$\mathbf{P}(Z_{N_n} \leqslant u_n,\ W_{N_n} \leqslant v_n) \to \int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-\tau x} - e^{(\tau+\gamma)x}\right) \mathrm{d}A(x).$$

Taigi, ribinė funkcija

$$\psi(\tau,\gamma) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\tau x}\right) \mathrm{d}A(x).$$

Toliau

$$\begin{aligned}
\Delta_{N_n}(\tau,\gamma) = \Bigg| \int_0^\infty \Bigg( \left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^{nx} - \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^{nx} - \mathrm{e}^{-\tau x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma x}\right)\Bigg) \mathrm{d}A_n(nx) \\
+ \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau x}\left(1 - e^{-\gamma x}\right) \mathrm{d}\big(A_n(nx) - A(x)\big)\Bigg| \\
\leqslant \int_0^\infty \left| \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^{nx} - \mathrm{e}^{-(\tau+\gamma)x} \right| \mathrm{d}A_n(nx) \\
+ \int_0^\infty \left|A_n(nx) - A(x)\right| \mathrm{d}\mathrm{e}^{-\tau x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma x}\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Kadangi

$$\begin{aligned}
\left| \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^{nx} - e^{-(\tau+\gamma)x} \right| = \left| x \int_{\mathrm{e}^{-(\tau+\gamma)}}^{\left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^n} t^{x-1}\, \mathrm{d}t \right| \\
\leqslant x \left| \mathrm{e}^{-(\tau+\gamma)} - \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^n \right| \rho_n(\tau,\gamma,x)
\end{aligned}$$

ir analogiškai

$$\left| \left(1 - \frac{\tau_n + \gamma_n}{n}\right)^{nx} - \mathrm{e}^{\tau x} \right| \leqslant x \left| \mathrm{e}^{-\tau} - \left(1 - \frac{\tau_n}{n}\right)^n \right| \rho_n(\tau,x),$$

tai, įstatę šiuos įverčius į (6), gauname teoremos įrodymą.

## Literatūra

[1] M.R. Leadbetter *et al.*, *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, New York, Heldelberg, Berlin (1986).

[2] A. Aksomaitis, Rates of convergence in the transference theorems for the extrema values, *22$^{nd}$ European Meeting of Statisticians*, Vilnius, TEV, Abstracts (1998).

[3] A. Aksomaitis, Maksimumų su atsitiktiniu komponenčių skaičiumi asimptotiniai tyrimai, *LMD mokslo darbai*, III tomas, MII, 461–465 (1999).

# Asymptotical investigations of the general distributions of the maxima and minima

A. Aksomaitis

The convergence rate estimations in the limit theorem of the general distribution functions of the extreme values are presented. There results extend theoretical prepositions of the published work [3].