

Plokštelių sandūros zonų modeliavimas baigtiniais elementais šilumos perdavimo uždaviniuose

Sigita TURSKIENĖ (ŠU)

el. paštas: sigita@fm.su.lt

1. Įvadas

Pastaruoju metu praktikoje vis plačiau naudojamos plonasienės išsišakojančios konstrukcijos, kurios dirba intensyviomis šilumos mainų su aplinka sąlygomis.

Įvertinant baigtinių elementų metodu temperatūros reikšmes tokiose konstrukcijose, iškyla plokštelių sandūros zonų modeliavimo baigtiniais elementais problema. Ji sprendžiama [1,2,3] darbuose, kuriuose plokštieji elementai sujungiami trikampaiais ar keturkampaiais prizminiais baigtiniais elementais. Be to, rastos transformacijos formulės, pagal kurias prizmės pagrindų kraštinių vidurių mazgai pervedami į prizmės kampinius mazgus, ir formulės, pagal kurias kampinių mazgų temperatūros reikšmės perskaičiuojamos į pagrindų kraštinių vidurio mazgų temperatūros reikšmes.

Šiame darbe bandoma išspręsti šilumos perdavimo uždavinį, kai nagrinėjama konstrukcija yra iš anizotropinės medžiagos, o plokštelės šoniniuose paviršiuose vyksta ne tik konvekciniai, bet ir šilumos spinduliavimo mainai su aplinka. Plokštelių sandūros zoną modeliuosime jungiamuoju keturkampiu prizminiu elementu iš izotropinės medžiagos, kurio pagrindinės išraiškos aprašytos darbe [2].

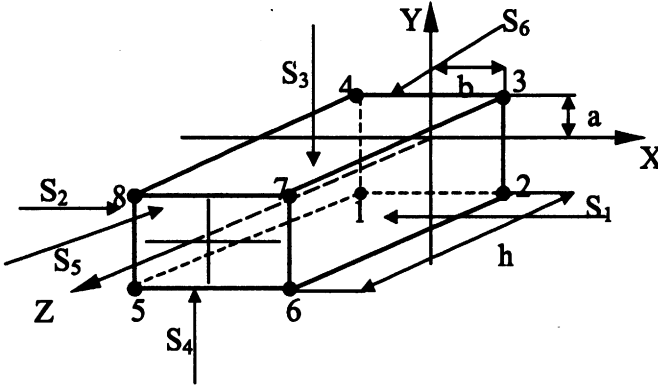
2. Jungiamojo erdvinio baigtinio elemento matricos

Nagrinėjamas vienodo skerspjuvio jungiamasis erdvinis baigtinis elementas, kurio pagrindas yra stačiakampis (1 pav.). Elementas turi 8 laisvės laipsnius.

Temperatūra elemento viduje aprašoma pirmos eilės interpoliaciniu daugianariu:

$$T = [N_1, N_2, \dots, N_8] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \dots \\ T_8 \end{Bmatrix} = [N]\{T\}^e, \quad (1)$$

čia $[N]$ – elemento formos funkcijų matrica, $\{T\}^e$ – temperatūros reikšmės elemento mazguose. Formos funkcijų reikšmės taške (x, y) užrašomos taip:



1 pav. Jungiamojo baigtinio elemento geometrija.

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{Sh}(b-x)(a-y)(h-z), & N_5 &= \frac{1}{Sh}(b-x)(a-y)z, \\
 N_2 &= \frac{1}{Sh}(b+x)(a-y)(h-z), & N_6 &= \frac{1}{Sh}(b+x)(a-y)z, \\
 N_3 &= \frac{1}{Sh}(b+x)(a+y)(h-z), & N_7 &= \frac{1}{Sh}(b+x)(a+y)z, \\
 N_4 &= \frac{1}{Sh}(b-x)(a+y)(h-z), & N_8 &= \frac{1}{Sh}(b-x)(a+y)z.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Čia $S = 4ab$ – elemento skerspjūvio plotas, h – elemento aukštis. Dydžių a ir b reikšmės yra apskaičiuojamos pagal iš analizinės geometrijos žinomas formules atstumui tarp taškų nustatyti.

Nagrinėjamo baigtinio elemento šiluminio balanso mazguose lygtis užrašoma taip:

$$[C] \frac{\delta\{T\}}{\delta t} + [K]\{T\} = \{F\},
 \tag{3}$$

čia $[K]^e = \int \int \int [B]^T [D] [B] dV + \int \int_S \alpha [N]^T [N] dS + \int \int_S \alpha_r [N]^T [N] dS$ – šiluminio laidumo matrica;

$[C]^e = \int \int \int_V \rho c [N]^T [N] dV$ – elemento šiluminės talpos matrica;

$\{F\}^e = - \int \int \int_V Q [N]^T dV + \int \int_S q [N]^T dS - \int \int_S \alpha T_{apl} [N]^T dS - \int \int_S \alpha_r T_{apl} [N]^T dS$ – šiluminio apkrovimo vektorius;

α – šilumos atidavimo koeficientas,

V – kūno tūris,

S – šoninio paviršiaus plotas,

T_{apl} – aplinkos temperatūra,

$[B]$ – elemento formos funkcijų išvestinių pagal x, y, z matrica;

$\alpha_r = \sigma \epsilon (T^2 + T_{apl}^2) (T + T_{apl})$ – šilumos perdavimo spinduliavimu koeficientas;

ϵ – paviršiaus išspinduliavimas;

σ – Stefano ir Bolcmano konstanta;

ρ – medžiagos tankis;

c – specifinė šiluma;

$[D]$ – anizotropinės medžiagos šilumos laidumo koeficientų matrica;

t – laikas.

Baigtinio elemento lygtyse naudojamos matricos užrašomos taip:

$$[D] = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$[B]^T = \frac{1}{Sh} \begin{bmatrix} -(a-y)(h-z) & -(b-x)(h-z) & -(b-x)(a-y) \\ (a-y)(h-z) & -(b+x)(h-z) & -(b+x)(a-y) \\ (a+y)(h-z) & (b+x)(h-z) & -(b+x)(a+y) \\ -(a+y)(h-z) & (b-x)(h-z) & -(b-x)(a+y) \\ -(a-y)z & -(b-x)z & -(b-x)(a-y) \\ (a-y)z & -(b+x)z & (b+x)(a-y) \\ (a+y)z & (b+x)z & (b+x)(a+y) \\ -(a+y)z & (b-x)z & (b-x)(a+y) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Apskaičiuodami elemento matricas priimsime, kad

$$\iiint_V dV = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_0^h dz dy dx.$$

Aptarsime elemento šiluminio laidumo matricą. Bendroju atveju ji turi tris dedamąsias:

- pirmasis integralas nusako elemento šilumos laidumą, sąlygotą medžiagos šiluminių laidumo koeficientų;
- antrasis integralas nusako elemento šiluminį laidumą, sąlygotą konvekcinį šilumos mainų su aplinka per šoninius elemento paviršius ir galus;
- trečiasis integralas nusako elemento laidumą, sąlygotą šiluminio pernešimo spinduliavimu per elemento šoninius paviršius ir galus.

Pirmąją dedamąją elemento šiluminio laidumo matricą turi visada, o antrąją ir trečiąją reikia įvertinti tik tuomet, kai šoniniai paviršiai ir galai yra atviri, t.y. kontaktuoja su aplinka.

Apskaičiuosime elemento šiluminio laidumo matricos pirmąjį integralą. Į jo išraišką įrašome matricų $[B]$ ir $[D]$ reikšmes. Pastebime, kad pointegraliniai reiškiniai yra gana sudėtingi. Todėl rankiniu būdu juos apskaičiuoti nelengva, be to, nesunku ir suklysti. Šiuo

atveju patogų pasinaudoti kompiuterinės algebras sistemomis MAPLE V ir MATHEMATICA. Galutinė elemento šiluminio laidumo pirmojo integralo išraiška užrašoma taip:

$$\frac{2ab}{9s^2h} \begin{bmatrix} 2m_1 & -2m_2 & -2m_3 & 2m_4 & m_5 & -m_6 & m_7 & -m_8 \\ -2m_2 & 2m_1 & 2m_4 & -2m_3 & -m_6 & m_5 & -m_8 & m_7 \\ -2m_3 & 2m_4 & 2m_1 & -2m_2 & m_7 & m_8 & m_5 & -m_6 \\ 2m_4 & -2m_3 & 2m_2 & 2m_1 & -m_8 & m_7 & -m_6 & m_5 \\ m_5 & -m_6 & m_7 & -m_8 & 2m_1 & -2m_2 & -2m_3 & 2m_4 \\ -m_6 & m_5 & -m_8 & m_7 & -2m_2 & 2m_1 & 2m_4 & -2m_3 \\ m_7 & -m_8 & m_5 & -m_6 & -2m_3 & 2m_4 & 2m_1 & -2m_2 \\ -m_8 & m_7 & -m_6 & m_5 & 2m_4 & -2m_3 & -2m_2 & 2m_1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Čia

$$\begin{aligned} m_1 &= 3a^4k_z + b^2(h^2(k_x + 3k_y) + 3b^2k_z) + a^2(h^2(3k_x + k_y) + 10b^2k_z), \\ m_2 &= 3a^4k_z + a^2(h^2(3k_x + k_y) - 8b^2k_z) + b^2(h^2(k_x - 3k_y) - 3b^2k_z), \\ m_3 &= 3a^4k_z + a^2(h^2(3k_x - k_y) - 10b^2k_z) + b^2(-h^2(k_x - 3k_y) + 3b^2k_z), \\ m_4 &= 3a^4k_z - b^2(h^2(k_x + 3k_y) + 3b^2k_z) + a^2(h^2(3k_x - k_y) + 8b^2k_z), \\ m_5 &= -6a^4k_z + a^2(h^2(3k_x + k_y) - 20b^2k_z) + b^2(h^2(k_x + 3k_y) - 6b^2k_z), \\ m_6 &= -6a^4k_z + b^2(h^2(k_x - 3k_y) + 6b^2k_z) + a^2(h^2(3k_x + k_y) + 16b^2k_z), \\ m_7 &= 6a^4k_z + a^2(h^2(-3k_x + k_y) - 20b^2k_z) + b^2(h^2(k_x - 3k_y) + 6b^2k_z), \\ m_8 &= 6a^4k_z + b^2(h^2(k_x + 3k_y) - 6b^2k_z) + a^2(h^2(-3k_x + k_y) + 16b^2k_z). \end{aligned}$$

Baigtinio elemento matricos dėl konvekcinų šilumos mainų su aplinka apskaičiuotos [2] darbe.

Dabar apskaičiuosime šiluminio laidumo matricos trečiąjį integralą

$$\int \int_S \alpha_r [N]^T [N] dS, \quad (7)$$

kurio reikšmė priklauso nuo to, kuriame elemento paviršiuje vyksta šiluminis pernešimas spinduliavimu. Iš viso yra šeši paviršiai (1 pav.), kurie apibrėžiami taip:

$$\begin{aligned} S_1: x = b, y \in [-a, a], z \in [0, h], & \quad S_2: x = -b, y \in [-a, a], z \in [0, h], \\ S_3: x = a, x \in [-b, b], z \in [0, h], & \quad S_4: y = -a, x \in [-b, b], z \in [0, h], \\ S_5: x = h, x \in [-b, b], y \in [-a, a], & \quad S_6: z = 0, x \in [-b, b], y \in [-a, a]. \end{aligned}$$

Paviršiui S_1 integralo (7) reikšmė užrašoma taip:

$$S_1 = \frac{\alpha_r h a}{18} \begin{bmatrix} 2[S'_1] & [S'_1] \\ [S'_1] & 2[S'_1] \end{bmatrix}, \quad \text{kur } [S'_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Analogiškai užrašomos (7) integralo reikšmės paviršiams S_1, S_3, S_4 . Tik matricos $[S'_j]$ reikšmės priklauso nuo paviršiui priklausančių mazgų numerių.

Šiluminio talpumo matrica turi pavidalą:

$$[C] = \frac{\rho c h a b}{54} \begin{bmatrix} 2[C'] & [C'] \\ [C'] & 2[C'] \end{bmatrix}, \quad \text{kur } [C'] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

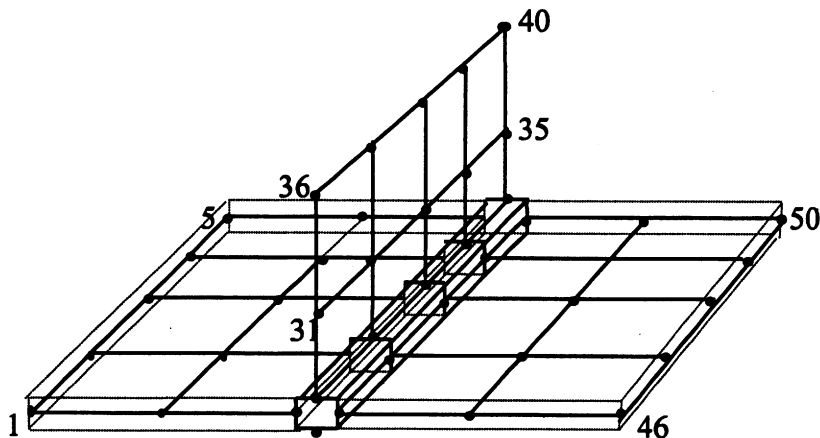
Elemento mazginių šilumos šaltinių galių vektorius, sąlygotas paskirstytųjų tūrinių šilumos šaltinių, apskaičiuojamas taip:

$$\iiint_V Q[N]^T dV = Q \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \end{pmatrix} \begin{matrix} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{matrix}$$

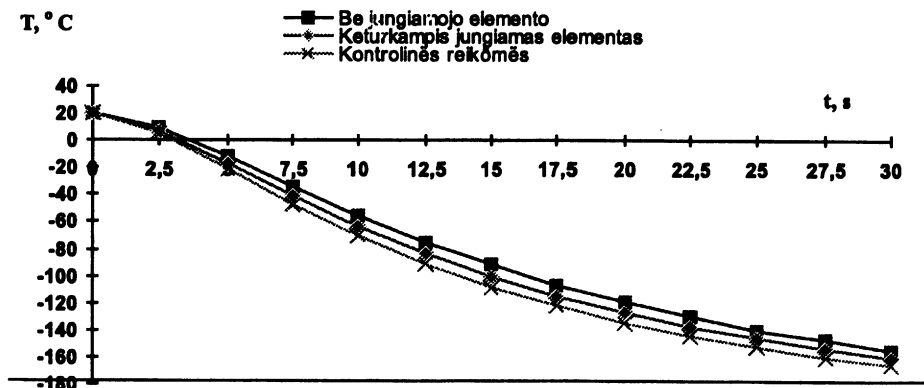
Čia (x_0, y_0, z_0) yra tūrinio šilumos šaltinio koordinatės.

Kitų šiluminio apkrovimo vektoriaus integralų reikšmės priklauso nuo to, kuriuose elemento paviršiuose vyksta šilumos mainai su aplinka. Pvz., paviršiui S_1

$$\int_{S_1} q[N]^T dS_1 = \frac{qha}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \int_{S_1} \alpha_r T_{apl}[N]^T dS_1 = \frac{\alpha_r T_{apl} h a}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



2 pav. Konstrukcijos baigtinių elementų tinklelis.



3 pav. Temperatūros konvergavimo taške 31 kreivės.

Skaičiavimo rezultatai

Tiriama šaldoma trišakė konstrukcija iš anizotropinės medžiagos. Jos viršutinė plokštuma veikiama spinduliavimo kraštinės sąlygos, o apatinę plokštumą šaldo skystis, kurio temperatūra -196°C . Konstrukcijos baigtinių elementų tinklelis su keturkampiu jungiamuoju elementu pavaizduotas 2 pav.

Temperatūros konvergavimui tirti panaudotos dvi baigtinių elementų schemas, kuriose skirtingai diskretizuojama plokštelių sandūros zona: be jungiamojo elemento, su jungiamuoju keturkampiu elementu. Analizei pasirinktas taškas 31(4.5,0.0,2.0), kurio koordinatės nurodytos skliaustuose, pavaizduotas 2 pav.

Remiantis skaičiavimo rezultatais (3 pav.), gautais naudojant siūlomą baigtinį elementą sandūros zonai diskretizuoti, galima padaryti šias išvadas:

1. Skaitinis sprendinys konverguoja;
2. Apskaičiuotos temperatūros reikšmės žymiai artimesnės kontrolinėms reikšmėms negu reikšmės, gautos nenaudojant jungiamojo elemento.

Literatūra

- [1] С. С. Варнелите, Д.А. Мацюлявичюс, Призматический конечный элемент для моделирования зон стыка в температурных задачах тонкостенных разветвляющихся и комбинированных конструкций, Науч. Тр. Вузов Лит. ССР Сер. *Литовский механический сборник*, Вильнюс, 29, 86–95 (1987).
- [2] S. Varnelytė-Turskienė, Plokštelių sandūros zonų diskretizavimas temperatūrinuose uždaviniuose, *Mechanika*, 3(6), Kaunas, 9–13 (1996).
- [3] S. Turskienė, Baigtinių elementų modeliai temperatūros laukų skaičiavimo uždaviniuose, *Lietuvos matematikų draugijos XXXVIII konferencijos darbai*, Vilnius, 324–329 (1997).

The Modeling by finite elements of plane junction zones in heat transfer problems

S. Turskienė

The paper deals with the temperature field analysis problem of the junction zone of the thin-walled branched structures plates, which is important for the investigation of thermal stress concentration zones.