Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 423–429

Karinių operacijų matematinis modeliavimas

Albertas PINCEVIČIUS, Rimantas-Jonas RAKAUSKAS (LKA),
Gintautas MISEVIČIUS (LKA, VU)
e-mail: pincev@takas.lt, lkak3@ktl.mi.lt

1. Uždavinio formulavimas

Modeliuojant karines operacijas naudojamas metodas pagrįstas tolydaus laiko Markovo grandinėmis su baigtine būsenų aibe. Sudaromas sistemos būsenų grafas ir jas aprašanti diferencialinių lygčių sistema. Jei sistemos būsenų skaičius didelis, lygtys rašomos ne būsenų tikimybėms, bet tiesiogiai jų skaičiaus vidurkiams, nes priešingu atveju sistema būtų ir neaprėpiama ir neišsprendžiama. Toks aprašymo būdas vadinamas „vidurkių dinamikos metodu“ ir gerai tinka, jei sistema sudaryta iš daug vienodų elementų. Pavyzdžiui, norime aprašyti kovinius veiksmus tarp dviejų pėstininkų dalinių, kai kovotojų skaičius yra skaičiuojamas dešimtimis arba šimtais. Aprašomos sistemos grafas bus toks:

$$\begin{array}{ccccc} & x_1 & \qquad & y_1 & \\ \lambda_x & \Downarrow & & \Downarrow & \lambda_y \\ & x_0 & & y_0 & \end{array}$$

Būsenų grafas.

t.y. tiek padalinio x, tiek padalinio y kariai gali būti nesužeisti – būsena x_1, y_1 arba išvesti iš rikiuotės – būsena x_0, y_0 (x_1, y_1 ir x_0, y_0 vidutiniai karių skaičiai duotu laiko momentu), λ_x, λ_y – įvykių perėjimo srautų iš vienos būsenos į kitą intensyvumai. Diferencialinių lygčių sistema atitinkanti šį grafą, užrašoma taip [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{dm_x}{dt} = -r_y p_x m_y + n_x, \\ \dfrac{dm_y}{dt} = -r_x p_y m_x + n_y. \end{cases} \tag{1}$$

čia $\lambda_x = r_y p_x$, $\lambda_y = r_x, p_y, m_x, m_y$ – kovojančių dalinių karių skaičių vidurkiai, r_x, r_y – kiekvieno iš dalinių kario ugnies galia (vidutinis vieno kario šūvių skaičius per laiko vienetą – minutę, valandą, parą ar panašiai), p_x, p_y – vidutinės pataikymų tikimybės, n_x, n_y – į mūšį įsijungiantys pastiprinimai, buvę neapšaudomoje zonoje. Lygtys užrašytos darant prielaidas kad:

1) kiekvienas x grupės karys gali sužeisti (nukauti) bet kurį y grupės karį ir atvirkščiai;
2) vienu šūviu nukaunamas tik vienas karys;
3) sužeistas (nukautas) karys iš karto liaujasi dalyvavęs mūšyje.

Aptarsime lygčių sistemos koeficientų parinkimo būdus. Karių ugnies galią r_x, r_y apsprendžia turimi ginklai ir šovinių kiekis. Mūsų atveju laikysime, kad šis dydis abiems kovojančioms pusėms vienodas. Intensyvaus mūšio metu vienas karys iššaudo vidutiniškai apie 12 šovinių per minutę. Susišaudant užimtose pozicijose per parą sunaudojama 250–300 šovinių (paros norma). Jei kovoja reguliarūs daliniai, tai pataikymo tikimybės p_x, p_y vidutiniškai lygios kario šešėlio ploto (gynyboje $\approx 0,2\text{m}^2$ ir $\approx 1\text{m}^2$ puolimo metu) ir vieno kario apšaudomo vidutinio ploto $A_x = L \times h = 10 \times 2 = 20\text{m}^2$ santykiui (L – fronto linijos atkarpa vidutiniškai tenkanti vienam kariui, h – galimas taikinio aukštis), t.y. $p_x \approx p_y \approx 0,01$ arba 0,05. Lygčių sistema (1) tuo atveju, kai aprašoma reguliarių dalinių kova pozicijose, atrodys taip (λ_x ir $\lambda_y = 0,01 \times 300 = 3$):

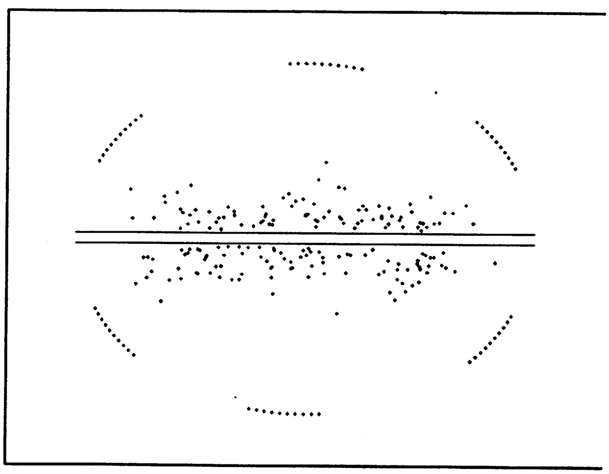
$$\begin{cases} \dfrac{dm_x}{dt} = -3m_y + n_x, \\ \dfrac{dm_y}{dt} = -3m_x + n_y. \end{cases} \tag{1a}$$

Jei x yra partizanų dalinys, tai pataikymo tikimybė p_x skaičiuojama kitaip. Šių modelių pradininkas ir kūrėjas anglų inžinierius F.U. Lančesteris [1] pasiūlė išreikšti ją taip:

$$p_x = \frac{s_x}{S_x} m_x,$$

čia S_x – partizanų užimamos teritorijos plotas, $\frac{S_x}{m_x}$ – realus vidutinis vienam partizanų dalinio kariui tenkantis plotas, s_x – vieno kario ginamas plotas. Pabandysime įvertinti šiuos dydžius. Aptarsime galimą realią mūšio schemą, kada keliu judančią reguliariųjų dalinių koloną sulaiko ir atakuoja partizanų dalinys.

1 pav. kryželiais pažymėtos vietos, kuriose yra kovoje dalyvaujantys kariai. Du partizanų būriai (60 karių), išsidėstę ratu ($r \approx 650$m), grupėmis po 10 karių, atakuoja 180



1 pav. Mūšio schema.

karių, važiavusių keliu. Šie kariai atsitiktinai išsidėstę apie kelią $150 \times 1000\text{m}^2$ plote. Reguliarių dalinių kariai nežino, kur išsidėstę partizanai, kiek jų sužeista. Tinkamai įrengus klaidinančius taikinius, besiginantys kariai šaudo aplink visomis kryptimis. Pataikymo tikimybę p_x siūloma išreikšti dviejų plotų santykiu, t.y. dydžių s_x – vidutinio vieno kario – „taikinio" ploto ($s_x \approx 0,2\text{m}^2$) ir $\frac{S_x}{m_x}$ – realaus vienam partizanų dalinio kariui tenkančio ploto. Tada

$$S_x = 2\pi rh = 2 \times 3,14 \times 650 \times 2 \approx 8000m^2 \quad \text{ir} \quad \frac{s_x}{S_x} \approx 0,000025.$$

Taigi, įvertinus parametrus, (1) lygčių sistemą gausime tokią:

$$\begin{cases} \dfrac{dm_x}{dt} = -0,0003m_x m_y + n_x \\ \dfrac{dm_y}{dt} = -0,12m_x + n_y. \end{cases} \tag{1b}$$

Pastiprinimą, atvykstantį iš užnugario kovojant reguliariesiems daliniams galime užrašyti taip:

$$n_x = \begin{cases} 2400, & \dfrac{5}{24} < t < \dfrac{6}{24}, \\ 0, & t < \dfrac{5}{24} \quad \text{ir} \quad t > \dfrac{6}{24}. \end{cases} \tag{2}$$

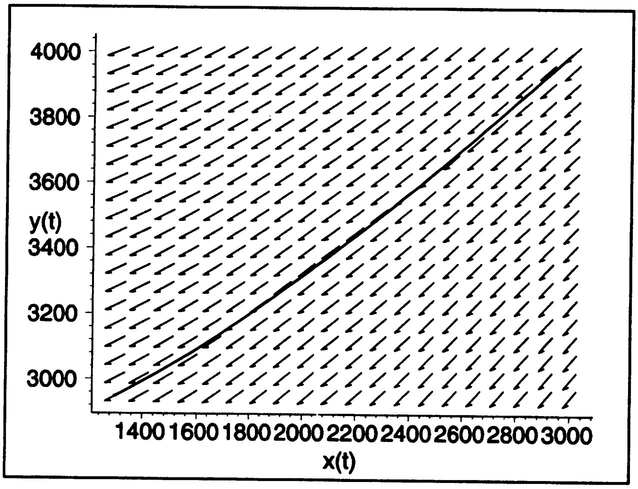
Šiuo konkrečiu atveju per valandą (laikas t skaičiuojamas paromis) pozicijose įsitvirtina dar šimtas karių. Jei netikėtai kelyje užklupti reguliarieji daliniai pradeda kovos veiksmus ne iš karto, tai šį partizanų pranašumą galima užrašyti prilyginus nuliui ugnies galią r_y. Pavyzdžiui, kada reguliarūs daliniai pirmąsias tris minutes užiminėja pozicijas, (1) lygčių sistemos pirmosios lygties dešinės pusės pirmojo koeficiento išraiška bus tokia (laikas skaičiuojamas minutėmis):

$$r_y p_x m_y = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad 0 < t < 3, \\ r_y p_x m_y, & \text{kai} \quad t > 3. \end{cases} \tag{3}$$

Laiko skaičiavimo būdą apsprendžia ugnies galių r_x, r_y nusakymo būdas. Šiuo konkrečiu atveju buvo nurodytas šūvių skaičius per minutę.

2. Karinių veiksmų modeliavimo rezultatai ir jų aptarimas

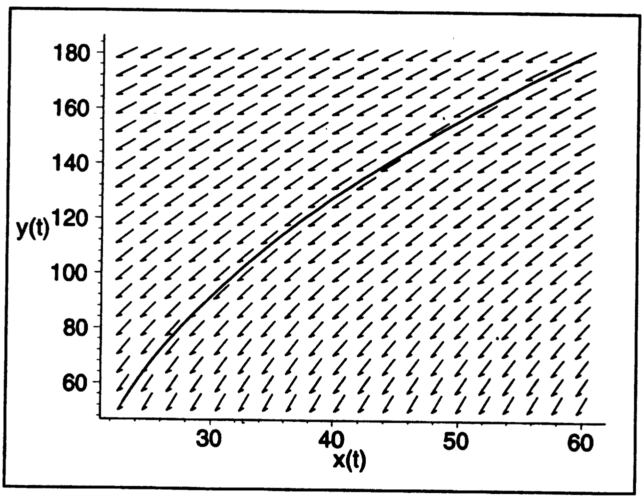
Lygčių sistema išspręsta pasinaudojant kompiuterinės algebros paketu MAPLE [3]. Kaip jau minėjome, sistema (1a) aprašo dviejų reguliarių dalinių kovos veiksmus. Ši sistema tiesinė ir yra gaunamas analizinis sprendinys. Nesunku patikrinti padalijus sistemos pirmąją lygtį iš antrosios, kad lygtimis aprašomos fazinės trajektorijos bus hiperbolės. Mus dominantis pirmasis kvadrantas parodytas 2 pav.



2 pav. Reguliarių dalinių kovos veiksmus aprašanti fazinė diagrama.

Skaičiuojant lygčių sistemos (1a) fazinę trajektoriją, abiejų dalinių ugnies galios ir vidutinė pataikymų tikimybės laikomos lygiomis. Spręsta su pradinėmis sąlygomis $m_x(0) = 3000$, $m_y(0) = 4000$. Jei nėra pastiprino, nagrinėjamu atveju laimi ta pusė, kuri turi daugiau karių. Prielaida, kad ginkluotės ir vidutinis karių pasiruošimas to paties lygio tikriausiai artimas tiesai. Mūšis skaitosi pralaimėtas, kai vienos iš kovojančių šalių žūsta daugiau pusės karių.

Kada aprašoma kova tarp partizanų ir reguliariųjų dalinių, netiesinė lygčių sistema (1b) sprendžiama skaitmeniškai. Gerai pasiruošę mūšiui partizanai gali laimėti, kai jų skaičius yra daug mažesnis už reguliariųjų dalinių. Pateikiame 3 pav. tokios kovos fazinę diagramą. Čia nagrinėjome atvejį, atvaizduotą 1 pav., t.y. reguliariųjų dalinių kovotojų



3 pav. Reguliarių dalinių ir partizanų kovą aprašanti fazinė diagrama.

1 lentelė

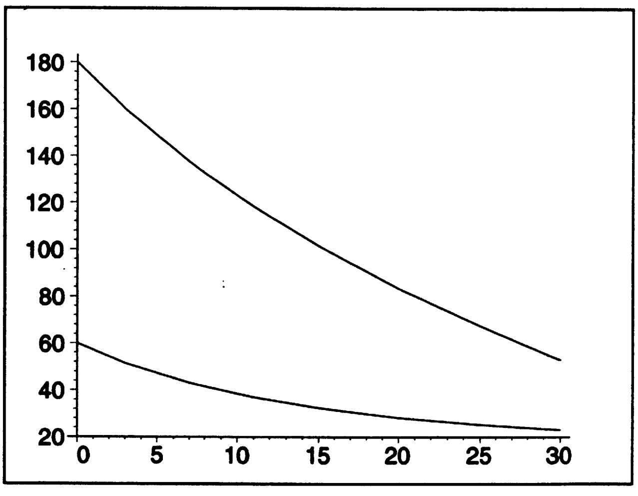
Laikas, min	$m_x(t)$	$m_y(t)$
0	60	180
3	51	159
7	43	137
11	37	118
15	32	101
20	28	83
25	25	67
30	23	53

skaičius tris kartus viršija partizanų skaičių.

Abiejų dalinių karių vidutinės ugnies galios vienodos – 12 šūvių per minutę. Vidutinė tikimybė pataikyti į partizaną – 0,000025, į reguliariųjų dalinių karį – 0,05. Kaip buvo pasakyta anksčiau, toks susirėmimas praktiškai gali vykti apie dešimt ar penkiolika minučių, nes per tokį laiką reguliarūs daliniai turėtų sulaukti pastiprinimo, o partizanų daliniams tektų greitai išsisklaidyti. Aišku, įdomi kovojančių pusių vidutinio karių skaičiaus kitimo laikinė priklausomybė. Mes ją pateikiame 1 lentelėje ir 4 pav.

Viršutinė kreivė – reguliariųjų dalinių skaičius, apatinė – partizanų. Realiai, netikėtai užpulti reguliarūs daliniai pradės kovą tik po kokių trijų minučių. Tą faktą galima įskaityti pasinaudojus formule (3). Naudojamas lygčių sistemai spręsti paketas MAPLE turi galimybę užrašyti intervalais tolydžiąją funkcija

$$r_y p_z = \begin{cases} 0, & \text{jei} \quad t \leqslant 3, \\ 0,0003, & \text{jei} \quad t > 3, \end{cases}$$



4 pav. Karių skaičiaus laikinė priklausomybė.

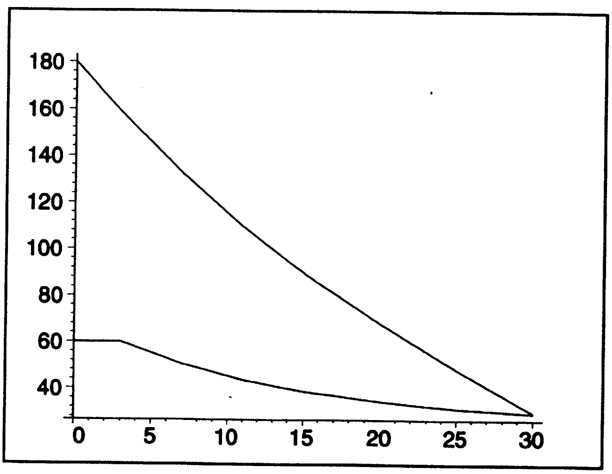
2 lentelė

Laikas, min	$m_x(t)$	$m_y(t)$
0	60	180
3	60	158
7	50	132
11	43	109
15	38	89
20	34	67
25	31	48
30	29	30
35	28	12

kuri labai reikalinga šio konkretaus atvejo sprendimui. Šio atvejo sprendimo rezultatai parodyti 2 lentelėje ir 5 pav.

Matome, kad šiuo atveju, kuris yra artimiausias realiai situacijai, partizanai gali laimėti kovą su minimaliais nuostoliais. Viršutinė kreivė 5 pav. parodo reguliariųjų dalinių karių skaičiaus kitimą, apatinė – partizanų, jei pirmąsias tris minutes reguliariųjų dalinių kariai užimdinėjo gynybos pozicijas. Po penkiolikos minučių mūšio abi pusės netenka beveik pusės karių, bet reguliariųjų dalinių nuostoliai žymiai didesni.

Pateikti modeliai leidžia analizuoti įvairias kovines situacijas ir parinkti konkrečią kovos taktiką, įvertinant susidarančias aplinkybes. Sprendimas užtrunka keletą sekundžių, esant reikalui programos nesunkiai keičiamos. Jos naudojamos Karo akademijos kariūnų apmokymui. Susipažinęs su jomis, būsimasis karininkas lengviau galės priimti sprendimą esant konkrečiai situacijai. Tobulinant programas reikėtų įvertinti galingesnių ginklų įtaką mūšio eigai, pvz. granatsvaidžių ar panašių, kuriuos turi pėstininkų daliniai. Toks uždavinys sudėtingesnis, nes turėtume įskaityti individualiai kiekvieno tokio ginklo poveikį mūšio eigai ir nebetiktų šiame darbe naudotas „vidurkių dinamikos metodas".



5 pav. Karių skaičiaus kitimas, kai reguliarūs daliniai atakuojami netikėtai.

Literatūra

[1] C.S. Coleman, *Combat model. Differential equation modes*, Springer, New York, 109–131 (1983).
[2] G. Misevičius, V. Pakalnytė, R. Eidukevičius, A. Pincevičius, R.J. Rakauskas, Mathematical modeling of military operation, *Nonlinear Analysis Modeling and Control*, **2**, Institute of Mathematics and Informatics, Vilnius, 81–88 (1998).
[3] M.B. Monagan, K.O. Geddes, K.M. Heal, G. Labahn, S.M. Vorkoeteer, *Maple V. Programing Guide*, Springer, New York (1996).

Mathematical modeling of the military operation

A. Pincevičius, R.-J. Rakauskas, G. Misevičius

The aim of this paper is show how the systems of differential equations may be applied both to describe the battle actions between the regular army and the partisans. We adapted the theory to the real situation of the battle actions.