Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 356–361

Skirtumų vektorinių lygčių su pastoviais koeficientais bendrieji sprendiniai

Artūras ŠTIKONAS (MII, VDU)
el. paštas: arturas.stikonas@fm.vtu.lt

1. Įvadas

Nagrinėkime sveikojo argumento funkcijas apibrėžtas aibėje $\bar{D} \subset \mathbb{Z}$. Vektorinės funkcijos $\vec{f}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$ komponentes žymėsime $\vec{f} := (f^1,\ f^2, \dots, f^n)^\top$, tokių funkcijų aibę – $\mathbb{F}^k(\bar{D})$, o pačias funkcijas – $f,\ g,\ f^{<1>}, \dots, f^{<k>}$. Funkcijos argumentą pakeisime indeksu $f_j := f(j)$. Jeigu $\bar{D} = \bar{D}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, tuomet $\mathbb{F}$ sutampa su begalinių sekų aibe, jeigu $\bar{D} = \bar{D}_n = \{0,\ 1,\ 2,\ \dots, n\}$, tuomet $\mathbb{F}$ – baigtinių sekų aibė.

Įveskime naują erdvę $M^{k,n}(\bar{D}) := \{A | A\colon \bar{D} \to L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)\}$, $M^n := M^{n,n}$, čia $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ – tiesinių operatorių erdvė. Jeigu $A \in M^{k,n}(\bar{D})$, tuomet visi A_j, $i = 1, \dots, n$, bus tiesiniai operatoriai, kuriuos konkrečioje koordinačių sistemoje atitinka matricos $\mathbf{A}_j$. Neišsigimusių operatorių aibę žymėkime $MN^k(\bar{D}) = \{A | A \in M^k(\bar{D}),\ \det \mathbf{A}_j \neq 0, j \in \bar{D}\}$.

Jeigu duotas operatorius $A \in L(\mathbb{R}^k) := L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$, tuomet egzistuoja tokia erdvės $\mathbb{R}^k$ bazė (*normalinė bazė*), kurioje operatoriaus A Žordano matrica užrašoma pavidalu

$$\mathbf{J}_A = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) \dots & 0 \\ \dots \quad \dots & \dots \\ 0 & \dots J_{n_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J}_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

čia λ – tikrinė operatoriaus A reikšmė, matrica $\mathbf{J}_m(\lambda)$ yra Žordano gardelė. Kaip žinome, operatoriaus A tikrines reikšmes galime rasti spręsdami lygtį $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$. Išskleidę šią lygybę, gauname tiesinio operatoriaus A charakteringąją lygtį $P_A(\lambda) = p^k\lambda^k + \dots + p^1\lambda + p^0 = 0$. Lygtis

$$a_j^0 z_j + a_j^1 z_{j-1} + \dots + a_j^k z_{j-k} = f_j, \quad j \in \bar{D} = \mathbb{Z}, \tag{1}$$

vadinama tiesine k-eilės skirtumų lygtimi. Čia $f,\ a^i \in \mathbb{F}(\bar{D})$, $i = 0, \dots, k$, $a_j^0 \neq 0$, $a_j^k \neq 0$. Jeigu $f \equiv 0$, tuomet lygtis yra *homogeninė*, priešingu atveju – *nehomogeninė*.

2. Tiesinės k-eilės skirtumų lygtys su pastoviais koeficientais

Tarkime, (1) lygtyje funkcijos $a^0, \ldots, a^k$ yra konstantos. Homogeninės (1) lygties sprendiniai ieškomi pavidalu $Z_j = \lambda^j$. Netrivialieji sprendiniai ($\lambda \neq 0$) gaunami, jei λ tenkina *charakteringąją lygtį*

$$a^0\lambda^k + a^1\lambda^{k-1} + \ldots + a^k = 0.$$

Ši lygtis turi k šaknų $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ (tarp kurių gali būti ir kartotinių, ir net kompleksinių). Jeigu šaknies λ_s kartotinumas yra k_s, tuomet lygties sprendiniais bus k_s funkcijų:

$$\lambda_s^j,\ j\lambda_s^j,\ \ldots, j^{k_s-1}\lambda_s^j. \tag{2}$$

Dvi kompleksines šaknis $\lambda_s r_s e^{i\varphi_s}$ ir $\bar{\lambda}_s = r_s e^{-i\varphi_s}$ atitiks $2k_s$ sprendinių:

$$r_s^j\cos(j\varphi_s),\ r_s^j\sin(j\varphi_s), \ldots, j^{k_s-1}r_s^j\cos(j\varphi_s),\ j^{k_s-1}r_s^j\sin(j\varphi_s). \tag{3}$$

Jeigu nehomogeninės lygties su pastoviais koeficientais dešinioji pusė yra kvazidaugianaris

$$a^0 z_j + a^1 z_{j-1} + \ldots + a^k z_{j-k} = P_m(j)\lambda_q^j \tag{4}$$

arba vietoje λ_q^j yra $r_q^j\cos(j\varphi_q)$ arba $r_q^j\sin(j\varphi_q)$, kurias atitinka kompleksinė šaknis $\lambda_q = r_q e^{i\varphi_q}$, tuomet atskirojo sprendinio ieškosime pavidalu

$$Z_j = j^{k_q}\tilde{P}_m(j)\lambda_q^j \ \text{ arba } Z_j = j^{k_q}r_q^j\Big(\tilde{P}_m^1(j)\cos(j\varphi_q) + \tilde{P}_m^2(j)\sin(j\varphi_q)\Big),$$

čia $\tilde{P}_m, \tilde{P}_m^1, \tilde{P}_m^2$ yra nežinomi daugianariai ir $\deg(\tilde{P}_m) = \deg(\tilde{P}_m^1) = \deg(\tilde{P}_m^2) = \deg(P_m)$, o k_s yra charakteringos lygties šaknies λ_s kartotinumas. Jeigu λ_s nėra šaknis, tuomet $k_s = 0$.

3. Tiesinės vektorinės skirtumų lygtys

Tiesine (pirmos eilės) vektorine skirtumų lygtimi vadinama lygtis

$$A_j^0\vec{z}_j + A_j^1\vec{z}_{j-1} = \vec{f}_j,\ \ j \in \bar{D}, \tag{5}$$

čia $\vec{f} \in \mathbb{F}^k(\bar{D})$, $A^0 \in MN^k(\bar{D})$, $A^1 \in M^k(\bar{D})$, $\vec{z} \in \mathbb{F}^k(\bar{D})$ yra ieškomoji funkcija.

Nagrinėkime k-eilės tiesinę skirtumų (1) lygtį. Šią lygtį užrašykime pavidalu

$$z_j = -\sum_{m=1}^{k}\beta_j^m z_{j-m} + \varphi_j, \tag{6}$$

čia $\beta_j^m = a_j^m/a_j^0$, $m = 1,\ldots,k$, $\varphi_j = f_j/a_j^0$, $j \in \bar{D}$. Įveskime k-mačius vektorius $\vec{z}$ su komponentėmis $\vec{z}_j = (z_{j-k+1}, z_{j-k+2},\ldots,z_j)^{\mathrm{T}}$ ir $\vec{\varphi}_j$ su komponentėmis $(0, 0,\ldots,\varphi_j)^{\mathrm{T}}$. Vietoje (6) lygties parašykime ekvivalenčią sistemą

$$
\begin{aligned}
&(\vec{z}_j)^1 = z_{j-k+1} = (\vec{z}_{j-1})^2,\\
&\ldots\\
&(\vec{z}_j)^{k-1} = z_{j-1} = (\vec{z}_{j-1})^k,\\
&(\vec{z}_j)^k = z_j = -\sum_{m=1}^{k} \beta_j^{k-m+1}\,(\vec{z}_j)^m + (\vec{\varphi}_j)^k.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Apibrėžkime matricą

$$
\mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \beta_j^k & \beta_j^{k-1} & \beta_j^{k-2} & \ldots & \beta_j^1 \end{pmatrix}. \tag{8}
$$

Dabar (7) sistema užrašoma vektorine forma $I\vec{z}_j = -B_j\vec{z}_{j-1} + \vec{\varphi}_j$, čia I - tapatusis operatorius. Tokiu būdu, vieną k-eilės tiesinę skirtumų lygtį suvedėme į vektorinę pirmos eilės tiesinę skirtumų lygtį.

Jeigu mes sprendžiame (5) lygties Koši uždavinį, tuomet vektorinės lygties Koši uždavinys formuluojamas su pradine sąlyga $\vec{z}_0 = \vec{\psi}$, čia $\vec{\psi} = (\psi^0, \psi^1,\ldots,\psi^{k-1})^{\mathrm{T}}$. Jeigu $\vec{f}_j = \vec{0}$, vektorinę (5) lygtį vadinsime *homogenine*, priešingu atveju – *nehomogenine*. Homogeninės lygties

$$
A_j^0\vec{z}_{j+1} + A_j^1\vec{z}_j = \vec{0} \tag{9}
$$

tiesiškai nepriklausomų sprendinių $\vec{Z}^{<1>},\ldots,\vec{Z}^{<k>}$ sistemą vadiname *fundamentaliąja*. Kadangi $\det A_j^0 \neq 0$ visiems j, todėl $\exists (A_j^0)^{-1}$ operatorius. Pažymėkime operatorių $A_j = -(A_j^0)^{-1}A_j^1$. Tuomet homogeninė (9) lygtis ekvivalenti lygčiai

$$
\vec{z}_{j+1} = A_j\vec{z}_j, \quad A_j \in M^k(\bar{D}). \tag{10}
$$

Homogeninės (9) lygties Koši uždavinio sprendinys egzistuoja ir yra vienintelis. Visų (9) lygties sprendinių aibė $\mathbb{S}^k(\bar{D}) \subset \mathbb{F}^k(\bar{D})$ yra tiesinė erdvė, kuri izomorfiška $\mathbb{R}^k$. Lygties fundamentalioji sistema yra sprendinių tiesinės erdvės bazė ir $\vec{Z}_B = \sum_{m=1}^{k} C^m\vec{Z}^{<m>}$.

Apibrėžkime tiesinį atvaizdį Φ_j: $\mathbb{S}^k(\bar{D}) \to \mathbb{R}^k$, $\Phi_j(\vec{Z}) = \vec{Z}_j$. Kadangi atvaizdis Φ_0 yra izomorfizmas, todėl $\exists\Phi_0^{-1}$. Tada atvaizdis $T_j = \Phi_j\Phi_0^{-1} \in L(\mathbb{R}^k)$, ir $T_j(\psi) = Z_j$, čia Z_j yra Koši uždavinio sprendinys. Galime apibrėžti ir atvaizdį $T_{j_0,j}$: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $T_{j_0,j}(Z_{j_0}) = Z_j$, $j > j_0$. Tiek T_j, tiek $T_{j_0,j}$ gali ir neturėti atvirkštinių, jei egzistuoja toks j_1, kad $j_0 \leqslant j_1 < j$ ir $\det A_{j_1} = 0$.

Vektorinės lygties atveju funkcijų $\vec{f}^{<1>}, \ldots, \vec{f}^{<k>}$ Vronskio determinantas apibrėžiamas

$$W_j[\vec{f}^{<1>}, \ldots, \vec{f}^{<k>}] = \begin{vmatrix} f_j^{<1>,1} & \ldots & f_j^{<k>,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_j^{<1>,k} & \ldots & f_j^{<k>,k} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Vronskio determinanto geometrinė prasmė yra gretasienio, nubrėžto ant vektorių $\vec{f}^{<1>}$, $\ldots, \vec{f}^{<k>}$, tūris. Funkcijų sistema $\vec{f}^{<1>}, \ldots, \vec{f}^{<k>}$ yra fundamentalioji tada ir tik tada, kai jų Vronskio determinantas nelygus 0, kuriame nors taške j.

1 teorema [Liuvilio skirtumų lygčiai]. *Vronskio determinantas sudarytas iš* (5) *lygties sprendinių, tenkina lygtį*

$$W_{j+1} = \det A_j \cdot W_j, \quad j \in \bar{D}. \tag{12}$$

Iš Liuvilio teoremos gauname, kad, pereinant iš taško j į $j+1$, gretasienio, nubrėžto ant (10) lygties sprendinių, tūris keičiasi pagal (12) dėsnį, t.y. padidėja det A_j kartų. Jeigu (9) lygtyje $A_j^0 \equiv A^0$, $A_j^1 \equiv A^1$ (arba (10) lygtyje $A_j \equiv A$), tuomet ši lygtis vadinama tiesine lygtimi su pastoviu operatoriumi.

Nagrinėkime Koši uždavinį

$$\vec{z}_{j+1} = A\vec{z}_j, \quad j \in \bar{D}, \quad z_0 = \psi, \tag{13}$$

čia $A \in L(\mathbb{R}^k)$. Tada egzistuoja vienintelis tokios sistemos sprendinys ir jo formulė yra $\vec{Z}_j = T_j\psi = A^j\psi$, čia A^j yra operatoriaus A laipsnis.

Paprastųjų diferencialinių lygčių (PDL) teorijoje įrodoma, kad lygčių sistemos su pastoviais koeficientais

$$\frac{d}{dt}\vec{z} = A\vec{z}, \quad \vec{z}(0) = \vec{z}_0, \tag{14}$$

sprendinys užrašomas pavidalu $\vec{Z}_L(t) = \mathrm{e}^{At}\vec{z}_0$. Čia operatorius e^{At} apibrėžtas formule

$$\mathrm{e}^{At} := I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m t^m}{m!}.$$

Iš jos turime $\dfrac{d^i}{dt^i}\mathrm{e}^{At} = A^i\mathrm{e}^{At}$. Todėl

$$\frac{d^i\vec{Z}_L}{dt^i}\bigg|_{t=0} = \left(\frac{d^i}{dt^i}\mathrm{e}^{At}\right)\bigg|_{t=0} \vec{Z}_0 = A^i\vec{Z}_0 = \vec{Z}_i.$$

Lema. *Teisinga formulė*

$$\vec{Z}_i = \frac{d^i\vec{Z}_L}{dt^i}\bigg|_{t=0}. \tag{15}$$

Ši lema leidžia surasti visus (13) uždavinio sprendinius, žinant (14) diferencialinio uždavinio sprendinius. Jei turime k (14) lygties sprendinių $Z_L^{<1>}, \ldots, Z_L^{<k>}$, tuomet šių sprendinių Vronskio determinantas taške $t = 0$, sutaps su $W_0[\vec{Z}_L^{<1>}, \ldots, \vec{Z}_L^{<k>}]$.

PDL teorijoje įrodoma teorema apie sistemos su pastovia matrica sprendinius.

2 teorema. *Sakykime, A: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ yra tiesinis operatorius, o λ_l $(1 \leqslant l \leqslant m_R)$ šio operatoriaus realios tikrinės reikšmės, atitinkančios skirtingas Žordano matricos gardeles, kurių dydis ν_l, ir $\alpha_l \pm \beta_l\mathrm{i}$ $(1 \leqslant l \leqslant m_c)$ – kompleksinės tikrinės reikšmės, atitinkančios skirtingas Žordano matricos gardeles, kurių dydis μ_l. Tada* (14) *lygties bendrojo sprendinio komponentės yra*

$$\vec{Z}_L^i = \sum_{l=1}^{m_c} p_l^i(t)\mathrm{e}^{\lambda_l t} + \sum_{l=1}^{m_c} \big(q_l^j(t)\cos(\beta_l t) + \tilde{q}_l^i(t)\sin(\beta_l t)\big)\mathrm{e}^{\alpha_l t}.$$

Čia p_l^i, q_l^i, $\tilde{q}_l^i$ – realieji daugianariai, kurių laipsnis mažesnis už ν_l, μ_l, μ_l.

Pastaba. Jeigu $z = x - y\mathrm{i}$, $\lambda = \alpha + \beta\mathrm{i}$, tuomet

$$\mathrm{Re}(z\mathrm{e}^{\lambda t}) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{\alpha t}(x - y\mathrm{i})(\cos\beta t + \sin\beta t\ \mathrm{i})\big) = \mathrm{e}^{\alpha t}(x\cos\beta + y\sin\beta).$$

Todėl antrąją sumą galime pakeisti $\mathrm{Re}\sum_{l=1}^{m_C} \widetilde{p}_l^i(t)\mathrm{e}^{\lambda_l t}$ su $\lambda_l \in \mathbb{C}$ ir $\widetilde{p}_l^i(t)$ – kompleksinis daugianaris, kurio laipsnis mažesnis už μ_l.

Tarkime, baziniai vektoriai atitinkantys vieną Žordano gardelę su tikrine reikšme $\lambda = 0$ yra $\vec{e}^1, \ldots, \vec{e}^n$. Suraskime pradinės sąlygos ψ komponentes šioje bazėje $\psi = \ldots + C^1\vec{e}^1 + \ldots + C^n\vec{e}^k + \ldots$. Operatorius A veikia šiuos bazinius vektorius kaip postūmis $\vec{e}^n \to \vec{e}^{n-1} \to \ldots \to \vec{e}^1 \to \vec{0}$. Tada

$$\begin{aligned}
\vec{Z}_0 &= (\ldots, C^1, C^2, \ldots, C^{n-1}, C^n, \ldots)^{\mathsf{T}},\\
\vec{Z}_1 &= (\ldots, C^2, C^3, \ldots, C^n, 0, \ldots)^{\mathsf{T}},\\
&\ldots\\
\vec{Z}_{n-1} &= (\ldots, C^n, 0, \ldots, 0, 0, \ldots)^{\mathsf{T}},\\
\vec{Z}_n &= (\ldots, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots)^{\mathsf{T}} = Z_{n+1} = \ldots.
\end{aligned}$$

Sprendinį atitinkantį $C^n = \delta_m^n$ pažymėkime $\vec{Z}^{<m>}$.

Imkime nepriklausomus (14) diferencialinės lygties sprendinius. Naudodamiesi (15) formule lengvai gausime nepriklausomus atitinkamos skirtumų lygties sprendinius.

3 teorema. *Sakykime, A: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ yra tiesinis operatorius ir šio operatoriaus Žordano matrica turi ν_l dydžio gardeles, atitinkančias nenulines realias tikrines reikšmes $\lambda_l(1 \leqslant l \leqslant m_R)$, μ_l dydžio gardeles, atitinkančias kompleksines tikrines reikšmes $r_l\mathrm{e}^{\pm\varphi_l\mathrm{i}}$ $(1 \leqslant l \leqslant m_C)$, $\kappa_l(1 \leqslant l \leqslant m_0)$ dydžio gardeles, atitinkančias nulines tikrines reikšmes. Tada* (13) *skirtumų lygties sprendinio komponentės*

$$Z_j^i = \sum_{l=1}^{m_R} p_l^i(j)\lambda^j + \sum_{l=1}^{m_C} \big(q_l^i(j)\cos(j\varphi_\cdot) + \tilde{q}_l^i(j)\sin(j\varphi_l)\big) + \sum_{l=1}^{m_0} C^l Z^{<l>;i},$$

čia $p_l^i, q_l^i, \tilde{q}_l^i$ – realieji daugianariai, kurių laipsnis mažesnis už ν_l, μ_l, μ_l, o C^l – konstantos.

Jeigu operatorius A turi (8) pavidalo matricą, tuomet kiekvieną jo tikrinę reikšmę atitinka lygiai viena Žordano gardelė, kurios dydis sutampa su tikrinės reikšmės kartotinumu.

Išvada. *Homogeninės* (1) *lygties sprendinių fundamentalioji sistema sudaryta iš* (2), (3) *tipo funkcijų. Nulinių tikrinių reikšmių nėra, nes* (1) *lygtyje laikome* $a^0 \neq 0,\ a^k \neq 0$.

Pavyzdys [Čebyšovo daugianariai]. Čebyševo daugianariai tenkina skirtumų lygtį

$$z_j - 2xz_{j-1} + z_{j-2} = 0, \quad z_0 = 1, \quad z_1 = x,$$

čia x – parametras. Rekurentiškai spręsdami, mes randame sprendinių reikšmes:

$$Z_0 = 1, \quad Z_1 = x, \quad Z_2 = 2x^2 - 1, \quad Z_3 = 4x^3 - 3x, \ldots.$$

Sprendžiant skirtumų lygtis gauname bendrąsias šių daugianarių išraiškas:

$$Z_j = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^j + (x - \sqrt{x^2 - 1})^j}{2}, \quad |x| > 1$$
$$Z_j = \cos(j \arccos x), \quad |x| < 1.$$

Šiuo atveju skirtumų lygtį atitinka charakteristinė lygtis $\lambda^2 - 2x\lambda + 1 = 0$. Remiantis lema, gauname, kad Čebyševo polinomus generuoja diferencialinės lygties (Koši uždavinio)

$$y'' - 2xy' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = x$$

sprendinys $Z_c = e^{xt}\mathrm{ch}\,(\sqrt{x^2 - 1}\,t) = e^{xt}\cos\,(\sqrt{1 - x^2}\,t)$, ir Čebyševo daugianariai gaunami formule $Z_j = \left.\frac{d^j Z_c}{dt^j}\right|_{t=0}$.

Literatūra

[1] N.S. Bachvalov, N.P. Zhidkov and G.M. Kobelkov, *Numerical Methods*, Nauka, Moscow (1987) (in Russian).

[2] A.A. Samarskii and A.V. Goolin, *Numerical Methods*, Nauka, Moscow (1989) (in Russian).

The general solutions of difference vector-equations with constant coefficients

A. Štikonas

This paper deals with general solutions of difference vector-equations with constant coefficients. We find the simple formulae between solution of the first order homogeneous differential equations and solution of difference equation. This allows easily get all solutions of difference equations if we know the differential solution.