Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 350–355

Aposteriorinių paklaidos įverčių tikslumas

Raimondas ČIEGIS (MII, VGTU), Olga SUBOČ (VGTU)
el. paštas: rc@fm.vtu.lt

1. Uždavinio formulavimas

Nagrinėsime kraštinį uždavinį intervale $(0,1)$:

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \quad x \in (0,1), \qquad (1)$$
$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

kai išpildytos lygties eliptiškumo sąlygos

$$k(x) \geqslant k_0 > 0, \quad q(x) \geqslant 0.$$

Skaliarinę sandaugą pažymėkime $(\cdot,\cdot)$, o atitinkamą L_2 normą intervale $(0,1)$ pažymėkime $\|\cdot\|$. Tegul H_0^1 yra erdvė tokių funkcijų, kurių pirmosios išvestinės priklauso L_2 erdvei ir tenkina nulines kraštines sąlygas.

Tada variacinis uždavinio (1) formulavimas yra toks:

$$(Lu, v) = (f, v) \quad \forall\, v \in H_0^1. \qquad (2)$$

Uždavinį (2) spręsime Galiorkino metodu. Intervale $(0,1)$ apibrėžiame diskretųjį tinklą

$$\Delta = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1\}.$$

Funkcijų erdvę H_0^1 aproksimuojame baigtinės dimensijos poerdviu $S_0^{p,\Delta}$, kurį sudaro gabalais p-ojo laipsnio polinomai.

Baigtinių elementų sprendinys $y \in S_0^{1,\Delta}$ yra gaunamas sprendžiant tiesinių lygčių sistemą

$$(Ly, v) = (f, v) \quad \forall v \in S_0^{1,\Delta}. \qquad (3)$$

Šiame darbe nagrinėsime aposteriorinius gautojo sprendinio y paklaidos įverčius, kai naudojama tik lokali informacija apie sprendinio netiktį atskirame elemente. Plačiau su tokio tipo paklaidų įverčiais galima susipažinti darbuose [1, 4].

2. Didesniojo tikslumo sprendinio panaudojimas

Aposterioriniai paklaidos įverčiai dažnai yra sudaromi panaudojant dar vieną to pačio uždavinio sprendinį, kuris randamas paėmus tankesnį diskretųjį tinklą arba aukštesnės eilės polinomų poerdvį. Tokių algoritmų pagrindinis privalumas yra tai, kad gauname *asimptotiškai tikslius* aposteriorinius paklaidos įverčius. Tačiau pagalbinio uždavinio sprendimo kaštai yra didesni už pagrindinio uždavinio sprendimo kaštus.

Šią strategiją taikysime uždaviniui (2). Rasime dar vieną baigtinių elementų metodo sprendinį $Y \in S_0^{2,\Delta}$, jis tenkina tiesinių lygčių sistemą

$$(LY, v) = (f, v) \quad \forall v \in S_0^{2,\Delta}. \tag{4}$$

Funkciją Y išreiškiame tokia bazinių funkcijų tiesine kombinacija

$$Y(x) = \sum_{j=1}^{N-1} Y_j \varphi_j(x) + \sum_{j=1}^{N} C_{j-0.5} \psi_{j-0.5}(x),$$

čia bazinės funkcijos yra apibrėžtos lygybėmis

$$\varphi_j = \begin{cases} (x - x_{j-1})/(x_j - x_{j-1}), & x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j, \\ (x_{j+1} - x)/(x_{j+1} - x_j), & x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}, \\ 0, & \text{kitur;} \end{cases}$$

$$\psi_{j-0.5} = \begin{cases} (x_j - x)(x - x_{j-1})/(x_j - x_{j-1})^2, & x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j, \\ 0, & \text{kitur.} \end{cases}$$

Pažymėkime sprendinio y globaliąją paklaidą

$$e(x) = u(x) - y(x), \quad e \in H_0^1.$$

Įvairias paklaidos normas $\|e\|_l$, $l = L_2, L_\infty, H^1$ galime įvertinti naudodami aposteriorinius įverčius $\|E\|_l$, čia pažymėjome

$$E(x) = Y(x) - y(x), \quad E \in S_0^{2,\Delta}.$$

Pasinaudoję sprendinio Y ir interpoliacinio polinomo $P_2 u$ superkonvergavimo savybėmis, galime įrodyti, kad $E(x)$ yra asimptotiškai tikslus aposteriorinis paklaidos įvertis

$$\|e\|_l = \|E\|_l (1 + Ch^2).$$

3. Lokalusis aposteriorinis paklaidos įvertis

Šiame darbe sudarysime naują lokalųjį aposteriorinį paklaidos įvertį. Jis gaunamas vietoj $Y(x)$ naudojant funkciją

$$\tilde{Y}(x) = \sum_{j=1}^{N-1} y_j \varphi_j(x) + \sum_{j=1}^{N} d_{j-0.5} \psi_{j-0.5}(x),$$

čia y_j yra Galiorkino metodu (3) gautojo sprendinio koeficientai. Tada koeficientus $d_{j-0.5}$ randame iš sprendinio netikties ortogonalumo sąlygų:

$$d_{j-0.5}\left(L\psi_{j-0.5}, \psi_{j-0.5}\right) = \left(R, \psi_{j-0.5}\right), \tag{5}$$

čia $R(x)$ pažymėjome lygties (3) sprendinio netiktį

$$R = f - Ly.$$

Nesunku įsitikinti, kad netikties integralą galime pertvarkyti tokiu būdu:

$$(R, \psi_{j-0.5}) = \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} \left(f(x) - q(x)y(x) + k'(x)y'(x)\right) \psi_{j-0.5}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Aposteriorinius paklaidos įverčius gauname panaudodami funkciją

$$\tilde{E}(x) = \tilde{Y}(x) - y(x) = \sum_{j=1}^{N} d_{j-0.5} \psi_{j-0.5}(x).$$

Po nesudėtingų skaičiavimų randame išreikštines aposteriorinių įverčių formules

$$\|\tilde{E}\|_{L_2} = \frac{1}{30} \sum_{j=1}^{N} d_{j-0.5}^2 (x_j - x_{j-1}),$$

$$\|\tilde{E}\|_{L_\infty} = \frac{1}{4} \max_{1 \leqslant j \leqslant N} |d_{j-0.5}|,$$

$$\|\tilde{E}\|_{H_E}^2 \equiv (L\tilde{E}, \tilde{E}) = \sum_{j=1}^{N} d_{j-0.5}^2 (L\psi_{j-0.5}, \psi_{j-0.5}).$$

Kadangi Galiorkino metodo sprendinių superkonvergavimo tinklo mazguose savybė negalioja $y \in S_0^{1,\Delta}$ (t.y. visame intervale $(0,1)$ funkcija $y(x)$ aproksimuoja uždavinio (2) sprendinį $O(h^2)$ tikslumu), tai negalime tiesiogiai įrodyti, kad mūsų sudarytasis aposteriorinis įvertis yra asimptotiškai tikslus.

Mes palyginsime gautąjį aposteriorinį paklaidos įvertį su kitais žinomais įverčiais ir pateiksime skaičiavimo eksperimento rezultatus.

3.1. *Įverčio tikslumas energetinėje normoje H_E*

Pasinaudoję skaitinio integravimo formulėmis ir jų paklaidos įverčiais, įrodome tokias lygybes

$$
\begin{aligned}
(L\psi_{j-0.5}, \psi_{j-0.5}) &= \frac{k_{j-0.5}}{3(x_j - x_{j-1})} + O(1),\\
(R, \psi_{j-0.5})^2 &= \frac{R^2_{j-0.5}(x_j - x_{j-1})^2}{36} + O(h^4),
\end{aligned}
$$

t.y. mūsų sudarytas aposteriorinis įvertis yra ekvivalentus Babuškos ir Rheinboldto įverčiui [2]:

$$
\|E\|_B^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{R^2_{j-0.5}(x_j - x_{j-1})^3}{12\, k_{j-0.5}} + O(h^4),
$$

o pastarasis įvertis yra asimptotiškai tikslus, jo tikslumo eilė yra pirmoji.

3.2. *Įverčio tikslumas L_2 normoje*

Šiame skirsnyje sudarysime baigtinių elementų sprendinio y globaliosios paklaidos L_2 normoje įvertį iš viršaus. Panaudosime dualiųjų įverčių metodiką (žr. pvz. [3]). Nagrinėkime uždavinį, kurį tenkina sprendinio globalioji paklaida, taikykime integravimo dalimis formulę ir pasinaudokime paklaidos ortogonalumo savybe, tada gauname tokias lygybes:

$$
\begin{aligned}
(k\, e', z') + (q\, e, z) &= \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} R(x) z(x)\, \mathrm{d}x\\
&= \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} R(x)\big(z(x) - z_h(x)\big)\, \mathrm{d}x, \qquad z \in H_0^1, \qquad z_h \in S_0^{1,\Delta}.
\end{aligned}
$$

Įvertiname integralus dešinėje lygybės pusėje ir panaudojame tiesinio interpoliavimo tikslumo įvertį

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} R(x)\big(z(x) - z_h(x)\big)\, \mathrm{d}x\right| &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{N} h^4_{j-0.5} \int_{x_{j-1}}^{x_j} R^2\, \mathrm{d}x\right)^{0.5}\\
\times \left(\sum_{j=1}^{N} h^{-4}_{j-0.5} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (z - z_h)^2\, \mathrm{d}x\right)^{0.5} &\leqslant C_I \left(\sum_{j=1}^{N} h^4_{j-0.5} \int_{x_{j-1}}^{x_j} R^2\, \mathrm{d}x\right)^{0.5} \|z''\|,
\end{aligned}
$$

o interpoliavimo tikslumo konstantą nesunkiai galime įvertinti nelygybe $C_I \leqslant 1$.

Toliau spręskime dualųjį variacinį uždavinį

$$(k\,v', z') + (q\,v, z) = (v, e), \quad v \in H_0^1$$

ir įvertinkime jo sprendinio stabilumą

$$\|z''\| \leqslant C_S\|e\|,$$

tada gauname tokį sprendinio y paklaidos L_2 normoje aposteriorinį įvertį

$$\|e\| \leqslant C_S C_I\Big(\sum_{j=1}^{N} h_{j-0.5}^4 \int_{x_{j-1}}^{x_j} R^2\,\mathrm{d}x\Big)^{0.5}.$$

Nesunku pastebėti, kad jei $k(x) = 1$, tai stabilumo konstanta $C_S \leqslant 1$. Aproksimuodami integralus vidurinių reikšmių formule, gauname paprastesnę formulę

$$\|e\|^2 \leqslant (C_S C_I)^2 \sum_{j=1}^{N} h_{j-0.5}^5 R_{j-0.5}^2.$$

Palyginimui pateiksime mūsų sukonstruoto aposteriorinio paklaidos įverčio supaprastintą formulę

$$\|\tilde{E}\|_{L_2} = \frac{1}{120}\sum_{j=1}^{N} h_{j-0.5}^5 R_{j-0.5}^2.$$

4. Skaičiavimo eksperimento rezultatai

Šiame paragrafe pateiksimo vieno skaičiavimo eksperimento rezultatus, kurie patvirtina mūsų teiginį, kad $\tilde{E}$ ne visada leidžia sukonstruoti asimptotiškai tikslų paklaidos įvertį. Sprendėme uždavinį (1) su tokiais koeficientais [2]:

$$k(x) = 1, \quad q(x) = 1,$$

o funkcija $f(x)$ buvo parinkta taip, kad tiksliu uždavinio sprendiniu yra funkcija

$$u(x) = e^x(x - 2.5) + 2.5(1 - x) + 1.5e^1 x.$$

Lentelėje 1 pateiktos reikšmės efektyvumo indekso

$$\gamma_l = \left|\frac{\|\tilde{E}\|_l}{\|e\|_l} - 1\right|,$$

leidžiančio įvertinti apsoteriorinio įverčio tikslumą.

Lentelė 1

Efektyvumo indekso γ reikšmės

N	γ_{L_2}	γ_{L_∞}
40	0.1329	0.0126
80	0.1332	0.0064
160	0.1332	0.0032
320	0.1332	0.0017

Iš pateiktų rezultatų matome, kad aposteriorinis įvertis yra asimptotiškai tikslus L_∞ normoje, bet L_2 normoje jis jau nepasižymi šia savybe. Pastebėsime, kad daugeliui kitų testinių uždavinių net ir L_2 normoje buvo gauti asimptotiškai tikslūs paklaidos įverčiai.

Literatūra

[1] M. Ainsworth and J.T Oden, A posteriori error estimation in finite element analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **142**, 1–88 (1997).

[2] I. Babuška and W. Rheinboldt, Analysis of optimal finite-element meshes in R^1, *Math. of Comp.*, **33**, 435–463 (1979).

[3] R. Becker and R. Rannacher, A feed-back approach to error control in finite element methods: Basic analysis and examples, *East-West J. Numer. Math.*, **4**, 237–264 (1996).

[4] R. Verfürth, *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*, John Wileys/Teubner, New York, Stuttgart (1996).

On the accuracy of aposteriori error estimators

R. Čiegis, O. Suboč

The analysis of the accuracy of the aposteriori error estimation procedure for finite-element solutions is presented. Simple error estimators of residual type are constructed, they allow error estimation in any norm with little extra effort. Results of numerical experiments are presented.