Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 265–269

Kai kurių silpnų indukcijų įrodomumas

Livija MALIAUKIENĖ (VPU)
el. paštas: maliaukiene@vpu.lt

Įvadas

Galimybę ekvivalenčiai pakeisti indukcijos aksiomą

$$\mathcal{A}(0)\&\mathcal{A}(1)\&\forall xy\left[\mathcal{A}(x)\&\mathcal{A}(y) \supset \mathcal{A}(x+y)\right] \supset \forall x\mathcal{A}(x)$$

(pažymėsime ją $\mathcal{I}^{+}$) baigtiniu skaičiumi paprastesnių aksiomų multiplikacinėje aritmetikoje nagrinėjo Parisas [1]. Garro [2] tyrė indukcijos aksiomos

$$\mathcal{A}(0)\&\forall x\left[\mathcal{A}(x) \sim \mathcal{A}(x')\right] \supset \forall x\mathcal{A}(x)$$

(pažymėsime ją $\mathcal{I}^{\sim}$) pakeičiamumo galimybę multiplikacinėje aritmetikoje su apribotu skirtumu. Tiek Parisas, tiek Garro, naudodami modelinius metodus nustatė, kad ekvivalentus keitimas nėra galimas. [3] straipsnyje rasti sąryšiai tarp multiplikacinių sistemų, turinčių atitinkamai $\mathcal{I}^{+}$, $\mathcal{I}^{\sim}$ bei įprastinę indukcijos aksiomą, teoremų klasių.

Šiame straipsnyje, naudojant konstruktyvius metodus, nustatomas indukcijos aksiomų $\mathcal{I}^{+}$ bei $\mathcal{I}^{\sim}$ įrodomumas multiplikacinėje aritmetikoje.

1. Sistema $\mathcal{Z}_0$

Tegu $\mathcal{Z}_0$ – sekvencinis pirmos eilės predikatų skaičiavimas su lygybe, aksiomomis

P.1. $\Gamma, \mathcal{F}, \Delta \to Z, \mathcal{F}, \Lambda,$

P.2. $\Gamma \to Z, c = c, \Lambda,$

taisyklėmis loginiams simboliams

T1. $$\frac{\Gamma_d^\alpha, c = d, \Delta_d^\alpha \to Z_d^\alpha}{\Gamma_c^\alpha, c = d, \Delta_c^\alpha \to Z_c^\alpha},$$

T2. $$\frac{\Gamma_d^\alpha, d = c, \Delta_d^\alpha \to Z_d^\alpha}{\Gamma_c^\alpha, d = c, \Delta_c^\alpha \to Z_c^\alpha},$$

T3. $$\frac{F, \Gamma \to Z, \Lambda}{\Gamma \to Z, \neg F, \Lambda},$$

T4. $\dfrac{\Gamma, \Delta \to F, Z}{\Gamma, \neg F, \Delta \to Z}$,

T5. $\dfrac{\Gamma \to Z, F, \Lambda; \Gamma \to Z, G, \Lambda}{\Gamma \to Z, F\&G, \Lambda}$,

T6. $\dfrac{\Gamma, F, G, \Lambda \to Z}{\Gamma, F\&G, \Delta \to Z}$,

T7. $\dfrac{\Gamma \to Z, F, G, \Lambda}{\Gamma \to Z, F \vee G, \Lambda}$,

T8. $\dfrac{\Gamma, F, \Delta \to Z; \Gamma, G, \Delta \to Z}{\Gamma, F \vee G, \Delta \to Z}$,

T9. $\dfrac{F, \Gamma \to Z, G, \Lambda}{\Gamma \to Z, F \supset G, \Lambda}$,

T10. $\dfrac{\Gamma, \Delta \to F, Z; \Gamma, G, \Delta \to Z}{\Gamma, F \supset G, \Delta \to Z}$,

T11. $\dfrac{F, \Gamma \to Z, G, \Lambda; G, \Gamma \to Z, F, \Lambda}{\Gamma \to Z, F \sim G, \Lambda}$,

T12. $\dfrac{\Gamma, \Delta \to F, G, Z; \Gamma, F, G, \Delta \to Z}{\Gamma, F \sim G, \Delta \to Z}$,

T13. $\dfrac{\Gamma \to Z, F_i^x, \Lambda}{\Gamma \to Z, \forall x F(x), \Lambda}$, čia i – parametras, neįeinantis į taisyklės išvadą

T14. $\dfrac{\Gamma, F_c^x, \forall x F(x), \Delta \to Z}{\Gamma, \forall x F(x), \Delta \to Z}$,

T15. $\dfrac{\Gamma \to Z, F_c^x, \exists x F(x), \Lambda}{\Gamma \to Z, \exists x F(x), \Lambda}$,

T16. $\dfrac{\Gamma, F_i^x, \Delta \to Z}{\Gamma, \exists x F(x), \Delta \to Z}$, čia i – parametras, neįeinantis į taisyklės išvadą

struktūrinėmis taisyklėmis

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, F}, \quad \frac{\Gamma \to \Delta}{F, \Gamma \to \Delta}, \quad \frac{\Gamma \to \Delta, F, F}{\Gamma \to \Delta, F},$$

$$\frac{F, F, \Gamma \to \Delta}{F, \Gamma \to \Delta}, \quad \frac{\Gamma \to \Delta, G, F}{\Gamma \to \Delta, F, G}, \quad \frac{\Gamma, G, F \to \Delta}{\Gamma, F, G \to \Delta},$$

pjūvio taisykle

$$\frac{\Gamma \to \Delta, M \,;\; M, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta}$$

bei signatūros $\{0$ (nulis), $'$ (sekantis po), P (einantis prieš), $+, \cdot\}$ simbolius apibrėžiančiomis aksiomomis (aksioma B8 buvo pasiūlyta J.C. Shepherdsono [4]):

A1. $\rightarrow t' \neq 0$,
A2. $\rightarrow P0 = 0$,
A3. $\rightarrow Pt' = t$,
A4. $\rightarrow t + 0 = t$,
A5. $\rightarrow t + s' = (t + s)'$,
A6. $\rightarrow t \cdot 0 = 0$,
A7. $\rightarrow t \cdot s' = ts + t$

bei aksiomomis

B1. $\rightarrow t \neq 0 \supset (Pt)' = t$,
B2. $\rightarrow t + s = s + t$,
B3. $\rightarrow t + (s + r) = (t + s) + r$,
B4. $\rightarrow t + s = t + r \supset s = r$,
B5. $\rightarrow t \cdot s = s \cdot t$,
B6. $\rightarrow t(sr) = (ts)r$,
B7. $\rightarrow t(s + r) = ts + tr$,
B8. $\rightarrow ns = nr \supset \bigvee_{i=1}^{n-1} (t + i)s = (t + i)r,\ n = 2, 3, \ldots$

2. Indukcijos aksiomų $\mathcal{I}^{\sim}$ bei $\mathcal{I}^{+}$ įrodomumas

Šiame skirsnyje pateikiami indukcijos aksiomų $\mathcal{I}^{\sim}$ bei $\mathcal{I}^{+}$ įrodymai sistemoje $\mathcal{Z}_0$ (struktūrinių taisyklių panaudojimas nebus žymimas).

1 Teorema. *Indukcijos aksioma $\mathcal{I}^{\sim}$ įrodoma sistemoje $\mathcal{Z}_0$.*

Įrodymas konstruojamas tokiu būdu:

$$\cfrac{\cfrac{\Omega \rightarrow \Lambda; \forall x \mathcal{A}(x) \rightarrow \forall x \mathcal{A}(x)}{\rightarrow M; M, \mathcal{A}(0), \forall x[\mathcal{A}(x) \sim \mathcal{A}(x')] \rightarrow \forall x \mathcal{A}(x)}\,[\alpha_2]}{\rightarrow \mathcal{A}(0) \& \forall x[\mathcal{A}(x) \sim \mathcal{A}(x')] \supset \forall x \mathcal{A}(x)}\,[\alpha_1]$$

čia $\alpha_1 = T9, T6$; $\alpha_2 = T10$; M yra formulė $\mathcal{A}(0) \& \forall x[\mathcal{A}(x) \supset \mathcal{A}(x')] \supset \forall x \mathcal{A}(x)$; Ω yra $\mathcal{A}(0), \forall x[\mathcal{A}(x) \sim \mathcal{A}(x')]$; Λ yra $\mathcal{A}(0) \& \forall x[\mathcal{A}(x) \supset \mathcal{A}(x')]$; sekvencija $\forall x \mathcal{A}(x) \rightarrow \forall x \mathcal{A}(x)$ yra $P.1$ aksioma.

Sekvencija $\rightarrow M$, t.y., $\rightarrow \mathcal{A}(0) \& \forall x[\mathcal{A}(x) \supset \mathcal{A}(x')] \supset \forall x \mathcal{A}(x)$, yra įrodoma sistemoje $\mathcal{Z}_0$ (žr. [5]).

Sekvencijos $\Omega \rightarrow \Lambda$ įrodymas užbaigiamas taip:

$$\cfrac{\cfrac{\mathcal{A}(a') \rightarrow \mathcal{A}(a')}{}\,[\alpha_3] \quad \cfrac{\mathcal{A}(a) \rightarrow \mathcal{A}(a)}{}\,[\alpha_3]}{\mathcal{A}(a), \mathcal{A}(a') \rightarrow \Delta; \ \rightarrow \mathcal{A}(a), \mathcal{A}(a'), \Delta}\,[\alpha_2]$$

$$\frac{\mathcal{A}(0) \to \mathcal{A}(0);\ \forall x[\mathcal{A}(x) \sim \mathcal{A}(x')] \to \forall x[\mathcal{A}(x) \supset \mathcal{A}(x')]}{\mathcal{A}(0),\ \forall x[\mathcal{A}(x) \sim \mathcal{A}(x')] \to \mathcal{A}(0)\&\forall x[\mathcal{A}(x) \supset \mathcal{A}(x')]}\ [\alpha_1]$$

čia $\alpha_1 = T5$; $\alpha_2 = T13, T14, T12$; $\alpha_3 = T9$; $\triangle$ yra formulė $\mathcal{A}(a) \supset \mathcal{A}(a')$. Abi viršutinės sekvencijos yra aksiomos $P1$.

Teorema įrodyta.

2 Teorema. *Indukcijos aksioma $\mathcal{I}^+$ įrodoma sistemoje $\mathcal{Z}_0$.*

Įrodymas. Pritaikę sekvencijai $\to \mathcal{I}^+$, t.y. $\to \mathcal{A}(0)\&\mathcal{A}(0')\&\forall xy[\mathcal{A}(x)\&\mathcal{A}(y) \supset \mathcal{A}(x+y)] \supset \forall x\mathcal{A}(x)$; pjūvio taisyklę su pjūvio formule M lygia

$$\mathcal{A}(0)\&\forall x[\mathcal{A}(x) \supset \mathcal{A}(x')] \supset \forall x\mathcal{A}(x),$$

gausime dvi sekvencijas: $\to M$, kuri yra įrodoma sistemoje $\mathcal{Z}_0$ (žr. [5]) bei sekvenciją

$$M \to \mathcal{I}^+,$$

kurios įrodymas konstruojamas tokiu būdu:

$$\frac{\mathcal{A}(0') \to \mathcal{A}(0'); \mathcal{A}(a) \to \mathcal{A}(a); \mathcal{A}(a') \to \mathcal{A}(a')}{}\ [\alpha_4]$$

$$\frac{\mathcal{A}(0'), \mathcal{A}(a)\&\mathcal{A}(0') \supset \mathcal{A}(a'), \mathcal{A}(a) \to \mathcal{A}(a')}{}\ [\alpha_3]$$

$$\frac{\mathcal{A}(0) \to \mathcal{A}(0); \Gamma \to \mathcal{A}(a) \supset \mathcal{A}(a')}{}\ [\alpha_2]$$

$$\frac{\Gamma \to \Phi; \forall x\mathcal{A}(x) \to \forall x\mathcal{A}(x)}{M \to \mathcal{I}^+}\ [\alpha_1]$$

čia $\alpha_1 = T9, T6$; $\alpha_2 = T5, T13$; $\alpha_3 = T9, T14$; $\alpha_4 = T10, T5$; Γ yra formulės $\mathcal{A}(0), \mathcal{A}(0'), \forall xy[\mathcal{A}(x)\&\mathcal{A}(y) \supset \mathcal{A}(x+y)]$; Φ yra formulė $\mathcal{A}(0)\&\forall x[\mathcal{A}(x) \supset \mathcal{A}(x')]$. Viršutinės sekvencijos yra $P1$ aksiomos.

Teorema įrodyta.

Literatūra

[1] J.B. Paris, Note on an induction axiom, *JSL*, **43**(1), 113–117 (1978).

[2] I. Garro, Independence proofs in arithmetic theories with very weak induction, *Bonner Math. Schr.*, **61** (1973).

[3] L. Maliaukienė, The power of some forms of the induction axiom in the multiplicative arithmetic, *Liet. Matem. Rink.*, **40**(1), 36–47 (2000).

[4] J.C. Shepherdson, The rule of induction in the free variable arithmetic based on + and ·, *Ann. Fac. Sci. Univ. Clermont, Math.*, **4**, 25–31 (1967).

[5] L. Maliaukienė, Konstruktyvus indukcijos aksiomos pakeičiamumo bekvantorinėje multiplikacinėje aritmetikoje įrodymas, *Liet. Matem. Rink.*, **23** 78–92 (1983) (rusų k.).

The provability of some weak forms of the induction axiom

L. Maliaukienė

In this paper the provability of some weak induction axioms in the multiplicative arithmetic is proved.