Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 252–256

Talio teorema ir jos taikymai

Juozas ŠINKŪNAS (VPU)
el. paštas: sinkunas@vpu.lt

A. Kolmogorovo, A. Pogorelovo, L. Atanasiano ir jų bendraautorių geometrijos vadovėliuose bei kitoje rusiškoje matematinėje literatūroje Talio teorema formuluojama taip: „Jei vienoje tiesėje nuosekliai atidėsime keletą lygių atkarpų, per jų galus nubrėšime lygiagrečias tieses, kertančias kitą tiesę, tai jos toje tiesėje iškirs tarpusavyje lygias atkarpas". Ši teorema mažai kur panaudojama tolimesniame geometrijos kurse. Lenkiškoje matematikos metodinėje literatūroje Talio teorema laikoma šitokia teorema: „Jei dvi lygigrečios tiesės kerta kampo kraštines, tai kampo kraštinėse atkirstos atkarpos yra proporcingos", o prancūziškuose matematikos vadovėliuose – „Jei dvi lygiagrečios tiesės kerta kampo kraštines, tai kampo kraštinėse atkirstos atkarpos, imant nuo kampo viršūnės, yra proporcingos". Metodiniu požiūriu pagrindinėje mokykloje priimtinesnis prancūziškasis Talio teoremos variantas. Tokia pat teorema naudojama ir vokiškuose matematikos vadovėliuose, tik ji čia nevadinama Talio vardu. Šiame straipsnelyje naudosimės prancūziškuoju Talio teoremos variantu. Remiantis Talio teorema įrodomi trikampių panašumo požymiai. Tačiau yra geometrijos vadovėlių, kuriuose trikampių panašumo požymiai įrodomi nesiremiant Talio teorema.

L. Atanasiano, B. Butuzovo ir kt. autorių geometrijos vadovėlyje [2] trikampių panašumo požymiai įrodomi remiantis teorema apie trikampių, turinčių po vieną lygų kampą, plotų santykį. Ši teorema yra pagalbinio pobūdžio ir vadovėlyje mažai kur taikoma. Kituose vadovėliuose [4, 6] Talio teorema įrodoma remiantis atkarpų matavimo teorija. [5] vadovėlyje trikampių panašumo požymiai įrodomi remiantis sinusų ir kosinusų teoremomis, o [1] vadovėlyje Talio teorema įrodoma remiantis stačiojo trikampio smailiojo kampo kosinuso apibrėžimu.

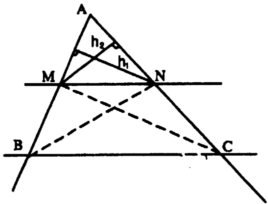
Gana sudėtinga atkarpų matavimo teorija pagal dabartines matematikos programas pagrindinėje mokykloje nenagrinėjama, trigonometrinės funkcijos įvedamos tik dešimtoje klasėje, o trikampių panašumas nagrinėjamas devintoje klasėje. Šiame straipsnelyje Talio teorema įrodoma remiantis trikampio ploto sąvoka bei parodoma kaip Talio teorema efektyviai taikoma sprendžiant uždavinius.

Talio teorema. *Jeigu dvi lygiagrečios tiesės kerta kampo kraštines, tai kampo kraštinėse atkirstos atkarpos imant nuo kampo viršūnės yra proporcingos.*

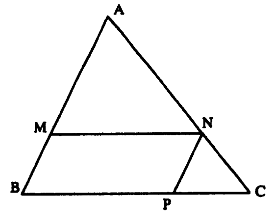
Įrodymas. Duota: $\angle BAC$, $MN || BC$.

Įrodyti:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$



1 pav.



2 pav.

Nagrinėkime trikampius MNB ir MNC (1 pav.). Jų plotai lygūs, nes kraštinė MN yra bendra, o aukštinės į šią kraštinę lygios atstumui tarp lygiagrečių tiesių MN ir BC. Taigi $S_{MNB} = S_{MNC}$. Kita vertus,

$$S_{ANB} = S_{AMN} + S_{MNB} = S_{AMN} + S_{MNC} = S_{AMC}.$$

Vadinasi,

$$\frac{S_{ANM}}{S_{ANB}} = \frac{S_{AMN}}{S_{AMC}}.$$

Kadangi

$$\frac{S_{ANM}}{S_{ANB}} = \frac{\frac{1}{2}AM \cdot h_1}{\frac{1}{2}AB \cdot h_1} = \frac{AM}{AB} \quad \text{ir}$$

$$\frac{S_{AMN}}{S_{AMC}} = \frac{\frac{1}{2}AN \cdot h_2}{\frac{1}{2}AC \cdot h_2} = \frac{AN}{AC}, \quad \text{tai}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

Teorema įrodyta.

Šis įrodymas pateiktas devintos klasės matematikos vadovėlyje. Teoremą įrodyti galėtų gabesni matematikai mokiniai. Visiems mokiniams įrodinėti teoremos nereikia.

1 išvada. *Tiesė, lygiagreti trikampio kraštinei ir kertanti kitas dvi kraštines, atkerta trikampį, kurio kraštinės proporcingos duotojo trikampio kraštinėms.*

Duota: $\triangle ABC$, $MN||BC$.

Įrodyti:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Įrodymas. Pagal Talio teoremą $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. Įrodysime, kad $\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Per tašką N nubrėžiame tiesę, lygiagrečią AB (2 pav.). Ji kraštinę BC kerta taške P. Kadangi $NP||AB$, tai pagal Talio teoremą:

$$\frac{CN}{CA}=\frac{CP}{CB} \quad \text{arba} \quad 1-\frac{CN}{CA}=1-\frac{CP}{CB}, \quad \text{t.y.} \quad \frac{AC-CN}{AC}=\frac{BC-CP}{BC}.$$

Iš čia

$$\frac{AN}{AC}=\frac{BP}{BC} \quad \text{arba} \quad \frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC},$$

nes $MN = BP$ kaip priešingosios lygiagretainio $BMNP$ kraštinės. Vadinasi,

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}.$$

Išvada įrodyta.

Nesunkiai įrodomos ir dar dvi išvados, kurios dažnai taikomos sprendžiant uždavinius.

2 išvada. *Jeigu tiesė MN, lygiagreti trikampio ABC kraštinei BC, kerta kitas dvi kraštines, tai* $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$.

3 išvada. *Jeigu lygiagrečios tiesės, ketančios kampo kraštines, vienoje kraštinėje atkerta lygias atkarpas, tai jos atkerta lygias atkarpas ir kitoje kraštinėje.*

Remiantis prieštaros metodu įrodoma teorema, atvirkštinė Talio teoremai: „Jeigu dvi tiesės kerta kampo kraštines ir jose atkerta proporcingas atkarpas, tai tos tiesės yra lygiagrečios“.

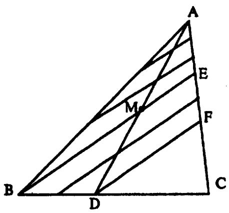
Remiantis 2 išvada ir Talio teorema, nesunku įrodyti bendresnę teoremą: „Jei lygiagrečios tiesės kerta dvi tieses, tai vienoje tiesėje iškirstos atkarpos yra proporcingos kitoje tiesėje iškirstoms atitinkamoms atkarpoms“.

Devintos klasės matematikos vadovėlyje [3] pateikiamas trikampių panašumo apibrėžimas: „Du trikampiai vadinami panašiais, jeigu jų atitinkami kampai yra lygūs, ir vieno trikampio kraštinės proporcingos atitinkamoms kito trikampio kraštinėms“ ir, remiantis Talio teoremos 1-ja išvada, įrodoma teorema, kad tiesė, lygiagreti trikampio kraštinei ir kertanti kitas kraštines, nuo jo atkerta panašų trikampį.

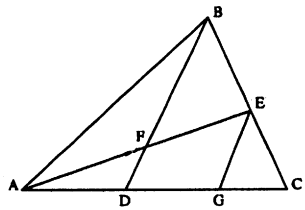
Mokytojas turėtų atkreipti gabesnių matematikai mokinių dėmesį į tai, kad trikampių panašumo apibrėžimas yra perteklinis, t.y. jame kampų lygumas nebūtinas. Galima trikampių panašumą apibrėžti taip: „Du trikampiai yra panašūs, jeigu jų atitinkamos kraštinės yra proporcingos“. Toks trikampių panašumo apibrėžimas duotas ir [5] vadovėlyje. Patys mokiniai galėtų įrodyti, kad panašiųjų trikampių atitinkami kampai yra lygūs.

Remdamiesi Talio teorema ir jos išvadomis, išspręsime keletą pavyzdžių.

1 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinę BC taškas D dalija santykiu $BD : DC = 1 : 2$, o taškas M atkarpą AD dalija santykiu $AM : MD = 3 : 2$. Tiesė BM kerta trikampio kraštinę AC taške E. Apskaičiuosime $S_{MECD} : S_{ABC}$.



3 pav.



4 pav.

Sprendimas.

Duota: $\triangle ABC$, $BD : DC = 1 : 2$, $AM : MD = 3 : 2$.

Rasti: $S_{MECD} : S_{ABC}$.

Akivaizdu, kad $S_{MECD} = S_{BEC} - S_{BMD}$. Trikampio ABC kraštinę BC padaliname į 3 lygias dalis, o atkarpą AD – į 5 lygias dalis. Per atkarpos AD dalijimo taškus ir tašką D nubrėžkime tieses, lygiagrečias tiesei BM (3 pav.). Jos atkarpą AF dalija į 5 lygias dalis (3-ji išvada), o atkarpą BD – į 2 lygias dalis. Kita vertus, pagal 2-ją išvadą

$$\frac{AE}{EF} = \frac{AM}{MD} = \frac{3}{2}, \quad \frac{CF}{FE} = \frac{DC}{BD} = \frac{2}{1} \quad \text{arba} \quad \frac{CE}{FE} = \frac{3}{1}.$$

Taigi $CE = 2AE$ arba $CE = \frac{2}{3}AC$. Vadinasi,

$$S_{BEC} = \frac{2}{3}S_{ABC}, \quad S_{BMD} = \frac{2}{5}S_{ABD} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{2}{15}S_{ABC} \quad \text{ir}$$

$$S_{MECD} = \frac{2}{3}S_{ABC} - \frac{2}{15}S_{ABC} = \frac{8}{15}S_{ABC}.$$

Taigi $S_{MECD} : S_{ABC} = 8 : 15$.

2 pavyzdys. Trikampio ABC viduje pažymėtas taškas F. Tiesės AF ir BF kerta trikampio kraštines atitinkamai taškuose E ir D (4 pav.). Apskaičiuosime santykį $AF : FE$, jeigu $AD : DC = m$ ir $EC : BE = n$.

Sprendimas. Per tašką E nubrėžkime tiesę EG, lygiagrečią tiesei BD. Lygiagrečios tiesės BD ir EG kerta kampų EAC ir ACB kraštines. Remdamiesi 1-ąja išvada, gauname:

$$\frac{AF}{FE} = \frac{AD}{DG} \quad \text{ir} \quad \frac{GC}{DG} = \frac{EC}{BE} = n.$$

Iš paskutiniųjų lygybių išplaukia, kad

$$\frac{DC}{DG} = \frac{DG + GC}{DG} = 1 + \frac{GC}{DG} = 1 + n.$$

Vadinasi,

$$\frac{AF}{FE} = \frac{AD}{DC} \cdot \frac{DC}{DG} = m(1 + n).$$

Analogiškai sprendžiami ir šie uždaviniai:

1. Trikampio ABC kraštinę BC taškas D dalija santykiu $BD{:}\,DC = 1{:}\,2$, o taškas M atkarpą AD dalija santykiu $AM{:}\,MD = 3{:}\,2$. Tiesė BM kerta trikampio kraštinę AC taške E. Apskaičiuokite $AM{:}\,ME$.

2. Trikampio ABC viduje pažymėtas taškas D. Tiesės AD, BD ir CD kerta trikampio kraštines atitinkamai taškuose E, F ir G. Apskaičiuokite $CF{:}\,FA$, jeigu $AG{:}\,GB = m$, $BE{:}\,EC = n$.

3. Smailiojo trikampio ABC kraštinių AB ir BC projekcijų į tiesę AC ilgiai atitinkamai lygūs 4 cm ir 6 cm. Raskite šio trikampio projekcijų į tiesę AC ilgius.

4. Trikampio ABC kraštinė AB lygi 6 cm, o kraštinė AC – 3 cm. Pusiaukampinė AD ir pusiaukraštinė BE susikerta taške M. Apskaičiuokite santykius $AM{:}\,MD$ ir $BM{:}\,ME$.

5. Trikampio ABC kampas A lygus 30°, o kampas B – 60°. Pusiaukraštinė BD ir aukštinė CE susikerta taške M. Apskaičiuokite santykius $BM{:}\,MD$ ir $CM{:}\,ME$.

6. Trikampio ABC pusiaukampinės AA_1, BB_1 ir CC_1 susikerta taške O. Apskaičiuokite santykius: $AO{:}\,OA_1$, $BO{:}\,OB_1$, $CO{:}\,OC_1$, jeigu $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

Literatūra

[1] A. Antibi, R. Barra, J. Malaval, *MATHS 3, NATHAN*, Paris (1993).

[2] L. Atanasianas, B. Butuzovas ir kt., *Geometrija 7–9*, Šviesa, Kaunas (1990).

[3] N. Cibulskaitė, K. Intienė, A. Plikusas ir kt., *Matematika 9*, I dalis, TEV, Vilnius (2000).

[4] A. Kiseliovas, *Geometrija*, I dalis, VPL, Kaunas (1956).

[5] А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, *Геометрия 7*, Просвещение, Москва (1985).

[6] А.В. Никулин, А.Г. Кукуш, Ю.С. Татаренко, *Геометрия на плоскости*, Альфа, Минск (1996).

Le théorème de Thalès est s'application

J. Šinkūnas

Dans cet article on a démontré le théorème de Thalès à l'aide de la notion de l'aire du triangle et a donné des examples d'application du théorème de Thalès.