Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 166–171

Atraminių linearų erdvių geodeziniai atvaizdžiai

Juozas ŠINKŪNAS (VPU)
el. paštas: sinkunas@vpu.lt

A. Ferzalijevas tyrė tenzorinių atraminių elementų erdvių su nepilna afiniąja sietimi geodezinius atvaizdžius ir surado būtinas bei pakankamas tokių atvaizdžių egzistavimo sąlygas [2]. Šiame straipsnelyje nagrinėjami atraminių linearų erdvių su bendrąja afiniąja sietimi geodeziniai atvaizdžiai. Surastos būtinos ir pakankamos tokių atvaizdžių egzistavimo sąlygos, ištirta atskira atraminių linearų erdvių klasė.

1. Invariantinės išvestinės

Atraminių linearų erdvėje $L_{n,v}(x^\alpha, v^{i\beta})$ [3] afinioji sietis apibrėžiama formomis

$$\tilde{\omega}^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta + L^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma + C_{k\beta\gamma}^{\alpha}\theta^{k\gamma} \tag{1.1}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, 2, 3, \ldots n; \quad i, j, k, \ldots = 1, 2, 3, \ldots, N).$$

Afinioji sietis erdvėje $L_{n,v}$ indukuoja tiesinę sietį

$$\tilde{\theta}^{i\alpha} = \Pi^{i\alpha}_{j\gamma}\theta^{j\gamma} + \Pi^{i\alpha}_{\gamma}\omega^\gamma, \tag{1.2}$$

kur

$$\Pi^{i\alpha}_{j\gamma} = \delta^i_j\delta^\alpha_\gamma + v^{k\varepsilon}(\delta^i_k C_{j\varepsilon\gamma}^{\alpha} + \delta^\alpha_\varepsilon c^i_k C_{j\sigma\gamma}^{\sigma}), \tag{1.3}$$

$$\Pi^{i\alpha}_{\gamma} = v^{k\varepsilon}(\delta^i_k L^\alpha_{\gamma\varepsilon} + \delta^\alpha_\varepsilon c^i_k L^\sigma_{\sigma\gamma}). \tag{1.4}$$

Toliau nagrinėsime tik tokias sietis, kurioms

$$\Pi^{i\alpha}_{j\gamma} = \delta^i_j\delta^\alpha_\gamma.$$

Pirmoje formulėje formas $\theta^{k\gamma}$ pakeitę formomis $\tilde{\theta}^{k\gamma}$, gauname:

$$\tilde{\omega}^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta + \Gamma^\alpha_{\beta\varepsilon}\omega^\varepsilon + C_{k\beta\gamma}^{\alpha}\tilde{\theta}^{k\gamma}, \tag{1.5}$$

kur

$$\Gamma^\alpha_{\beta\varepsilon} = L^\alpha_{\beta\varepsilon} - C_{k\beta\gamma}^{\alpha}\Pi^{k\gamma}_{\varepsilon}. \tag{1.6}$$

Linearo $T^{i\alpha}$ pirmos ir antros rūšies invariantinės išvestinės apibrėžiamos šitaip:

$$\nabla_\varepsilon T^{i\alpha} = \frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^\varepsilon} - \frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial v^{k\gamma}} \cdot \Pi^{k\gamma}_{\varepsilon} + T^{i\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\varepsilon} + c^i_k T^{k\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\sigma\varepsilon}, \tag{1.7}$$

$$\nabla_{k\varepsilon} T^{i\alpha} = \frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial v^{k\varepsilon}} + T^{i\gamma} C_{k\gamma\varepsilon}^{\ \alpha} + c^i_k T^{i\alpha} C_{k\gamma\varepsilon}^{\ \gamma}. \tag{1.8}$$

Alternuodami linearo $T^{i\alpha}$ pirmos ir antros rūšies antrąsias invariantines išvestines, gauname Riči tapatybes:

$$2\nabla_{[\gamma}\nabla_{\varepsilon]} T^{i\alpha} = T^{i\sigma} R^{\alpha}_{\sigma\gamma\varepsilon} + c^i_k T^{k\alpha} R^{\sigma}_{\sigma\gamma\varepsilon} - \nabla_\sigma T^{i\alpha} R^{\sigma}_{\gamma\varepsilon} - \frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial v^{k\sigma}} R^{k\sigma}_{\gamma\varepsilon}, \tag{1.9}$$

$$2\nabla_{\{k\varepsilon}\nabla_{j\gamma\}} T^{i\alpha} = T^{i\sigma} \sigma_{kj\sigma\varepsilon\gamma}^{\ \alpha} + c^i_l T^{l\alpha} \sigma_{kj\sigma\varepsilon\gamma}^{\ \sigma} - \frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial v^{l\sigma}} \cdot S^{l\ \sigma}_{kj\varepsilon\gamma}, \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\varepsilon \nabla_{j\gamma} T^{i\alpha} - \nabla_{j\gamma}\nabla_\varepsilon T^{i\alpha} &= T^{i\sigma} Q_{j\sigma\varepsilon\gamma}^{\ \alpha} + c^i_k T^{k\alpha} Q_{j\sigma\varepsilon\gamma}^{\ \sigma} \\ &\quad - \nabla_\sigma T^{i\alpha} C_{j\varepsilon\gamma}^{\ \sigma} - \frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial v^{k\gamma}} \cdot P^{k\sigma}_{j\varepsilon\gamma},\end{aligned} \tag{1.11}$$

kur

$$R^{\alpha}_{\sigma\gamma\varepsilon} = 2\left(\partial^E_{[\gamma}\Gamma^{\ \alpha}_{\varepsilon]\sigma} - \Gamma^{\ \alpha}_{[\gamma|\tau|}\Gamma^{\ \tau}_{\varepsilon]\sigma}\right), \tag{1.12}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{kj\sigma\varepsilon\gamma}^{\ \alpha} = \nabla_{\{k\varepsilon} C_{j|\sigma|\gamma\}}^{\ \alpha} - C_{\{k|\sigma|\varepsilon}^{\ \tau} C_{j|\tau|\gamma\}}^{\ \alpha}, \tag{1.13}$$

$$Q_{j\sigma\gamma\varepsilon}^{\ \alpha} = -\nabla_\varepsilon C_{j\sigma\gamma}^{\ \alpha} + \frac{\partial \Gamma^{\ \alpha}_{\sigma\varepsilon}}{\partial v^{j\gamma}}, \tag{1.14}$$

$$R^{\sigma}_{\gamma\varepsilon} = 2\Gamma^{\ \sigma}_{[\gamma\varepsilon]}, \tag{1.15}$$

$$\partial^E_\gamma \Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\sigma} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\sigma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\sigma}}{\partial v^{k\beta}} \Pi^{k\beta}_{\gamma}. \tag{1.16}$$

Pastaba. Linearų $R^{k\sigma}_{\gamma\varepsilon}$, $S^{l\ \sigma}_{kj\varepsilon\gamma}$, $P^{k\sigma}_{j\varepsilon\gamma}$ išraiškos neišrašytos, nes šie linearai šiame straipsnelyje nebus nagrinėjami.

Tenzorius $R^{\alpha}_{\sigma\gamma\varepsilon}$ vadinamas pirmuoju kreivumo tenzoriumi, o linearai $\sigma_{kj\sigma\gamma\varepsilon}^{\ \alpha}$ ir $Q_{j\sigma\gamma\varepsilon}^{\ \alpha}$ – antruoju ir trečiuoju kreivumo linearais.

2. Atraminių linearų erdvių geodeziniai atvaizdžiai

1 apibrėžimas. Erdvės $L_{n,v}$ su afiniąja sietimi be sukinio ($R^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$) kreivė

$$\begin{cases} x^\alpha = x^\alpha(t), \\ v^{i\beta} = v^{i\beta}(t) \end{cases}$$

vadinama afiniuoju keliu, jeigu liečiamasis vektorius $\frac{dx^\alpha}{dt}$ ir atraminis linearas $v^{i\beta}$ šia kreive pernešami lygiagrečiai.

Afiniųjų kelių lygtys yra:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x,v)\dfrac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}t} = \lambda_1\dfrac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}, & (2.1)\\ \dfrac{\mathrm{d}v^{i\alpha}}{\mathrm{d}t} + \left(\delta^i_k\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x,v) + c^i_k\delta^\alpha_\beta\Gamma^\sigma_{\sigma\gamma}(x,v)\right)\dfrac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}t}v^{k\beta} = 0; & (2.2) \end{cases}$$

čia λ_1 – skaliaras.

2 apibrėžimas. Atvaizdis $f\colon L_{n,v} \to \overline{L}_{n,v}$ vadinamas geodeziniu atvaizdžiu, jeigu jis vienos erdvės afiniuosius kelius atvaizduoja į kitos erdvės afiniuosius kelius.

Jeigu erdvė $L_{n,v}$ su sietimi $(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}, C^{\ \alpha}_{k\beta\gamma})$ be sukinio geodeziniu atvaizdžiu f atvaizduojama į erdvę $\overline{L}_{n,v}$ su sietimi $(\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}, \overline{C}^{\ \alpha}_{k\beta\gamma})$ be sukinio, tai atvaizdžio f atžvilgiu bendroje koordinačių sistemoje sistemos (2.1), (2.2) sprendiniai yra ir sistemos

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} + \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(x,v)\dfrac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}t} = \lambda_2\dfrac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}, & (2.3)\\ \dfrac{\mathrm{d}v^{i\alpha}}{\mathrm{d}t} + \left(\delta^i_k\overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(x,v) + c^i_k\delta^\alpha_\beta\Gamma^\sigma_{\sigma\gamma}(x,v)\right)\dfrac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}t}v^{k\beta} = 0 \text{ sprendiniai;} & (2.4) \end{cases}$$

čia λ_2 – skaliaras.

Tenzorius

$$T^\alpha_{\beta\gamma}(x,v) = \overline{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(x,v) - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x,v) \tag{2.5}$$

vadinamas afiniosios deformacijos tenzoriumi.

Jo komponentės tenkina lygčių sistemą

$$\begin{cases} T^\alpha_{\beta\gamma}\dfrac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}t} = \lambda\dfrac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}, & (2.6)\\ \left(\delta^i_kT^\alpha_{\beta\gamma} + c^i_k\delta^\alpha_\beta T^\sigma_{\sigma\gamma}\right)v^{k\beta}\dfrac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}t} = 0. & (2.7) \end{cases}$$

Šios sistemos (2.6) lygtis galima užrašyti šitaip:

$$\delta^{[\varepsilon}_\sigma T^{\alpha]}_{\beta\gamma}\frac{dx^\sigma}{dt}\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt} = 0. \tag{2.8}$$

Lygybės (2.7) ir (2.8) yra teisingos su bet kuriais $\frac{dx^\alpha}{dt}$, todėl

$$\delta^{[\varepsilon}_{(\sigma}T^{\alpha]}_{\beta\gamma)} = 0, \tag{2.9}$$

$$(\delta^i_kT^\alpha_{\beta\gamma} + c^i_k\delta^\alpha_\beta T^\sigma_{\sigma\gamma})v^{k\beta} = 0. \tag{2.10}$$

Iš (2.5) ir (2.9) lygybių išplaukia, kad:

$$\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + T^{\alpha}_{\beta\gamma}, \tag{2.11}$$

$$T^{\alpha}_{\beta\gamma} = 2\delta^{\alpha}_{(\beta}\psi_{\gamma)}, \tag{2.12}$$

kur

$$\psi_{\gamma}(x, v) = \frac{1}{n+1} T^{\sigma}_{\sigma\gamma}(x, v). \tag{2.13}$$

Dabar (2.10) lygybes galima perrašyti šitaip:

$$(\delta^i_k + (n+1)c^i_k)\delta^{\alpha}_{(\beta}\psi_{\gamma)} \cdot v^{k\beta} = 0. \tag{2.14}$$

Taigi įrodėme šitokią teoremą:

Teorema. *Tarp dviejų atraminių linearų erdvių su afininėmis sietimis be sukinio egzistuoja geodezinis atvaizdis tada ir tik tada, kai galioja* (2.11) – (2.14) *sąlygos.*

3. Kreivumo tenzorius ir trečiojo kreivumo linearo struktūra

Ištirsime kaip keičiasi kreivumo tenzorius (1.12) ir trečiasis kreivumo linearas (1.14), kai prie afiniosios sieties objekto $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ pridedamas simetrinis tenzorius $T^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Nagrinėsime tik tokias afiniąsias sietis $(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}, C^{\ \alpha}_{k\beta\gamma})$, kurios pasižymi savybe:

$$\nabla_{\varepsilon} C^{\ \alpha}_{k\beta\gamma} = 0. \tag{3.1}$$

Šiuo atveju trečiasis kreivumo linearas yra:

$$Q^{\ \alpha}_{j\beta\gamma\varepsilon} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\varepsilon}}{\partial v^{j\gamma}} \overset{\text{def}}{=} \partial_{j\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\varepsilon}. \tag{3.2}$$

Į formulę

$$\overline{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon} = 2(\partial^{E}_{[\gamma}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\varepsilon]\beta} - \overline{\Gamma}^{\tau}_{[\varepsilon|\beta|}\overline{\Gamma}^{\ \alpha}_{\gamma]\tau}) \tag{3.3}$$

įrašę $\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\varepsilon\beta}$ išraišką iš (2.11) (2.12) ir naudodamiesi (1.9) formule, gauname:

$$\overline{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon} = R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon} + 2\delta^{\alpha}_{\beta}\psi_{[\gamma\varepsilon]} + 2\delta^{\alpha}_{[\gamma}\psi_{|\beta|\varepsilon]}, \tag{3.4}$$

kur

$$\psi_{\alpha\beta} = \nabla_{\beta}\psi_{\alpha} - \psi_{\alpha} \cdot \psi_{\beta}. \tag{3.5}$$

Diferencijuodami lygybes

$$\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}(x,v)=\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x,v)+2\delta^{\alpha}_{(\beta}\psi_{\gamma)}(x,v) \tag{3.6}$$

pagal atraminį linearą $v^{k\varepsilon}$, gauname:

$$\partial_{k\varepsilon}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}=\partial_{k\varepsilon}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}+2\partial_{k\varepsilon}(\delta^{\alpha}_{(\beta}\psi_{\gamma)}). \tag{3.7}$$

Taigi pirmasis kreivumo tenzorius $R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}$ ir trečiasis kreivumo linearas, transformuojant afiniosios sieties objektą $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ pagal (3.6) formules, keičiasi pagal (3.4) ir (3.7) dėsnius; be to, vektorius ψ_α tenkina (2.14) ir (3.5) sąlygas.

4. Projektyviai euklidinių erdvių analogai

Sakykime, kad erdvė $L_{n,v}$ geodeziniu atvaizdžiu atvaizduojama į erdvę $\overline{L}_{n,v}$, kurios:

$$\overline{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}=0,\quad \partial_{k\varepsilon}\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}=0. \tag{4.1}$$

Šiuo atveju iš (3.3) ir (3.7) lygybių randame:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}=2\delta^{\alpha}_{\beta}\psi_{[\gamma\varepsilon]}+2\delta^{\alpha}_{[\varepsilon}\psi_{|\beta|\gamma]}, \tag{4.2}$$

$$\partial_{k\varepsilon}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=-2\partial_{k\varepsilon}\left(\delta^{\alpha}_{(\beta}\psi_{\gamma)}\right). \tag{4.3}$$

Apibrėžimas. Erdvę $L_{n,v}$, kurios kreivumo tenzorius $R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}$ ir trečiasis kreivumo linearas $\partial_{k\varepsilon}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ apibrėžiami (4.2) ir (4.3) lygybėmis, o ψ_α tenkina (2.14) ir (3.5) lygtis, vadinsime $L^0_{n,v}$ erdve.

Tai projektyviai euklidinės taškinės erdvės analogas.

Kaip ir projektyviai euklidinių taškinių erdvių atveju, $\psi_{\alpha\beta}$ galima išreikšti Riči tenzoriumi $R_{\alpha\beta}=R^{\gamma}_{\alpha\beta\gamma}$ [1]:

$$\psi_{\alpha\beta}=\frac{nR_{\alpha\beta}+R_{\beta\alpha}}{n^2-1}. \tag{4.4}$$

Tenzorius

$$W^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}=R^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon}+\delta^{\alpha}_{\beta}\frac{R_{\gamma\varepsilon}-R_{\varepsilon\gamma}}{n+1}+\delta^{\alpha}_{\gamma}\frac{nR_{\beta\varepsilon}+R_{\varepsilon\beta}}{n^2-1}-\delta^{\alpha}_{\varepsilon}\frac{nR_{\beta\gamma}+R_{\gamma\beta}}{n^2-1} \tag{4.5}$$

ir linearas

$$W^{\alpha}_{\beta\gamma\cdot k\varepsilon}=\partial_{k\varepsilon}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}-\frac{2}{n+1}\delta^{\alpha}_{(\beta}\partial_{|k\varepsilon}\Gamma^{\sigma}_{\sigma|\gamma)} \tag{4.6}$$

yra projektyvinio kreivumo Veilio tenzoriaus ir Veilio linearo analogai. Jų lygybė nuliui ekvivalenti (4.2) ir (4.3) lygybėms.

Taigi teisinga teorema:

Teorema. *Erdvė* $L_{n,v}$ *yra* $L^0_{n,v}$ *erdvė tada ir tik tada, kai Veilio tenzorius* (4.5) *ir Veilio linearas* (4.6) *lygūs nuliui.*

Literatūra

[1] П. К. Рашевский, *Риманова геометрия и тензорный анализ*, Наука, Москва (1967).

[2] А. С. Ферзалиев, О некоторых аналогах проективно-евклидовых пространств тензорных опорных элементов, *Труды семинара кафедры геометрии*, Из-во Казанского ун-та, вып. ВИ, 89–102 (1971).

[3] Ю. Шинкунас, О пространстве опорных линеаров, *Liet. mat. rink.*, 3(6), 449–455 (1966).

Les applications géodésiques des espaces des linéars d'appuis

J. Šinkūnas

Dans cet article on a étudie les applications géodésiques des espaces des linéars d'appuis avec la connexion affine. On a trouvé les conditions nécessaires et suffisantes de l'existence tels applications.