Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 161–165

Геометрия расслоения реперов

Казимерас НАВИЦКИС (VU)

Пусть M – дифференцируемое многообразие класса C^∞, $P^r(M)\xrightarrow{\pi_0^r}M$ – соответствующее главное расслоение голономных r-реперов, L_n^r – структурная группа расслоения $P^r(M)$. Рассмотрим локальную систему координат (u^i) в окрестности $U \subset M$. Голономный репер $X \in \left(\pi_0^r\right)^{-1}(U)$ определяется своими координатами $(i, j, \alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, n)$:

$$X = \left(u^i, u^i_{\alpha_1}, u^i_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, u^i_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\right);$$

здесь $u^i_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, u^i_{\alpha_1\ldots\alpha_r}$ симметричны относительно нижних индексов. Любой элемент $A \in L_n^r$ может быть записан в виде

$$A = \left(A^\alpha_{\beta_1}, A^\alpha_{\beta_1\beta_2}, \ldots, A^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_r}\right),$$

где $\det ||A^\alpha_\beta|| \neq 0$. Если

$$B = \left(B^\alpha_{\beta_1}, B^\alpha_{\beta_1\beta_2}, \ldots, B^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_r}\right) \in L_n^r,$$

то

$$AB = C = \left(C^\alpha_{\beta_1}, C^\alpha_{\beta_1\beta_2}, \ldots, C^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_r}\right),$$

где

$$C^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_a} = \sum_{b=1}^{a} A^\alpha_{\gamma_1\ldots\gamma_b} B^{\gamma_1\ldots\gamma_b}_{\beta_1\ldots\beta_a} \quad (a = 1, \ldots, r)$$

(явные выражения величин $B^{\gamma_1\ldots\gamma_b}_{\alpha_1\ldots\alpha_a}$ приведены в [1]).

Пусть

$$A^{-1} = \left(\overset{*}{A}{}^\alpha_{\beta_1}, \overset{*}{A}{}^\alpha_{\beta_1\beta_2}, \ldots, \overset{*}{A}{}^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_r}\right)$$

– обратный элемент к элементу A. На группе Ли $\bar{L}_n^r$ определим инвариантные слева дифференциальные 1-формы

$$\theta = \left(\theta^\alpha_{\beta_1}, \theta^\alpha_{\beta_1\beta_2}, \ldots, \theta^\alpha_{\beta_1\ldots\beta_r}\right)$$

равенствами

$$\theta^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a} = \sum_{b=1}^{a} \overset{*}{A}{}^{\alpha}_{\gamma_1\ldots\gamma_b} \mathrm{d}A^{\gamma_1\ldots\gamma_b}_{\beta_1\ldots\beta_a}.$$

Применяя метод математической индукции, получаем, что имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *1-формы* $\theta^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a}$ $(a = 1,\ldots,r)$ *удовлетворяют рекуррентным соотношениям*

$$\theta^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a} = \tilde{A}^{\alpha}_{\beta_1}\Big[\mathrm{d}A^{\beta_1}_{\alpha_1\ldots\alpha_a} - \sum_{b=1}^{a-1} C^b_a A^{\beta_1}_{\gamma(\beta_1\ldots\beta_b}\theta^{\gamma}_{\beta_{b+1}\ldots\beta_a)}\Big].$$

Применяя оператор внешнего дифференцирования получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Структурные уравнения группы Ли* L^r_n *имеют вид*

$$D\theta^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a} = \sum_{b=1}^{a} C^b_a \theta^{\gamma}_{(\beta_b\ldots\beta_b} \wedge \theta^{\alpha}_{\beta_{b+1}\ldots\beta_a)\gamma} \qquad (a = 1,\ldots,r).$$

Отображение

$$ad(B^{-1})\colon L^r_n \ni A \longrightarrow ad(B^{-1})A = B^{-1}AB \in L^r_n$$

является внутренним автоморфизмом группы Ли L^r_n. Пусть B-фиксированный элемент группы L^r_n. Отображение

$$ad(B^{-1})\colon A \longrightarrow ad(B^{-1})A$$

индуцирует отображение 1-форм

$$Ad(B^{-1})\colon \theta \longrightarrow Ad(B^{-1})\theta.$$

Применяя метод математической индукции, получаем, что имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Отображение* $Ad(B^{-1})$ *определяется следующими рекуррентными формулами:*

$$\big(Ad(B^{-1})\theta\big)^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a} = \overset{*}{B}{}^{\alpha}_{\varepsilon}\Bigg[\sum_{b=1}^{a} B^{\gamma_1\ldots\gamma_b}_{\beta_1\ldots\beta_a}\theta^{\varepsilon}_{\gamma_1\ldots\gamma_b} - \sum_{b=1}^{a-1} C^b_a B^{\varepsilon}_{\tau(\beta_1\ldots\beta_b}\big(Ad(B^{-1})\theta\big)^{\tau}_{\beta_{b+1}\ldots\beta_a)}\Bigg].$$

На главном расслоении $P^r(M)$ глобально определены 1-формы

$$\omega = \left(\omega^\alpha, \omega^\alpha_{\beta_1}, \omega^\alpha_{\beta_1\beta_2}, \dots, \omega^\alpha_{\beta_1\dots\beta_r}\right).$$

В локальных координатах на $P^r(U)$ они определяются рекуррентным образом из формул

$$\omega^\alpha = \tilde{u}^\alpha_i \mathrm{d}u^i,$$

$$\omega^\alpha_{\beta_1\dots\beta_a} = \tilde{u}^\alpha_i \left[\mathrm{d}u^i_{\alpha_1\dots\alpha_a} - \sum_{b=1}^{a-1} C^b_a u^i_{\gamma(\beta_1\dots\beta_b}\omega^\gamma_{\beta_{b+1}\dots\beta_a)} - u^i_{\beta_1\dots\beta_a\gamma}\omega^\gamma\right]$$
$$(a = 1, \dots, r);$$

здесь $\|\tilde{u}^\alpha_i\|$ – обратная матрица к матрице $\|u^i_\alpha\|$. Отметим, что 1-формы

$$\omega^\alpha_{\beta_1\beta_2}, \dots, \omega^\alpha_{\beta_1\dots\beta_r}$$

симметричны относительно нижних индексов.

Положим

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad \partial_i^{\alpha_1\dots\alpha_a} = \frac{\partial}{\partial u^i_{\alpha_1\dots\alpha_a}}.$$

Определим дифференциальный оператор $\partial^\#_\alpha$ равенством

$$\partial^\#_\alpha = u^i_\alpha \partial_i + \sum_{a=1}^{r-1} u^i_{\alpha_1\dots\alpha_a\alpha}\partial_i^{\alpha_1\dots\alpha_a}.$$

Пусть

$$\partial^\#_{\alpha_1\dots\alpha_a} = \partial^\#_{\alpha_a} \circ \dots \circ \partial^\#_{\alpha_1} \quad (a = 1, \dots, r).$$

Будем считать, что оператор формальной производной $\partial^\#_\alpha$ коммутирует с оператором внешнего дифференцирования D:

$$\partial^\#_\alpha \circ D = D \circ \partial^\#_\alpha.$$

Применяя оператор $\partial^\#_{\alpha_1\dots\alpha_a}$, получаем, что имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Структурные уравнения главного расслоения $P^r(M)$ имеют вид:*

$$\mathrm{D}\omega^\alpha = \omega^\gamma \wedge \omega^\alpha_\gamma,$$

$$\mathrm{D}\omega^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a} = \omega^{\gamma}_{\beta_1\ldots\beta_a}\wedge\omega^{\alpha}_{\gamma} + \sum_{b=1}^{a-1} C^b_a \omega^{\gamma}_{(\alpha_1\ldots\alpha_b}\wedge\omega^{\alpha}_{\alpha_{b+1}\ldots\alpha_a)\gamma} + \omega^{\gamma}\wedge\omega^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a} \quad (a=1,\ldots,r).$$

Элементу $A\in L^r_n$ соответствует правый сдвиг R_A, т. е. отображение, определяемое равенствами

$$(R_A u)^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a} = \sum_{b=1}^{a} u^i_{\beta_1\ldots\beta_b} A^{\beta_1\ldots\beta_b}_{\alpha_1\ldots\alpha_a}$$

$(a=1,\ldots,r)$. Отображение R_A индуцирует отображение 1-форм

$$R^*_A\colon \omega^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a} \longrightarrow (R^*_A\omega)^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a}.$$

Прямое вычисление показывает, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *1-формы $(R^*_A\omega)^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a}$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:*

$$(R^*_A\omega)^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a} = \tilde{u}^{\varepsilon}_i \overset{*}{A}{}^{\alpha}_{\varepsilon}\Big[\sum_{b=1}^{a} A^{\gamma_1\ldots\gamma_b}_{\beta_1\ldots\beta_a} u^i_{\gamma_1\ldots\gamma_b\tau} - (R_A u)^i_{\beta_1\ldots\beta_a\nu}\overset{*}{A}{}^{\nu}_{\tau}\Big]\omega^{\tau} + \overset{*}{A}{}^{\alpha}_{\varepsilon}\Big[\sum_{b=1}^{a} A^{\gamma_1\ldots\gamma_b}_{\beta_1\ldots\beta_a}\omega^{\varepsilon}_{\gamma_1\ldots\gamma_b} - \sum_{b=1}^{a-1} C^b_a A^{\varepsilon}_{\tau(\beta_1\ldots\beta_b}(R^*_A\omega)^{\tau}_{\beta_{b+1}\ldots\beta_a)}\Big].$$

Действие группы Ли L^r_n на главном расслоении $P^r(M)$ индуцирует гомоморфизм

$$\lambda\colon L(L^r_n) \longrightarrow X\big(P^r(M)\big)$$

алгебры Ли $L(L^r_n)$ группы Ли L^r_n в алгебру Ли $X\big(P^r(M)\big)$ векторных полей на $P^r(M)$. Векторное поле $\lambda(\bar{A})$ называется фундаментальным векторным полем, соответствующим векторному полю $\bar{A}\in L(L^r_n)$. Прямое вычисление показывает, что имеет место следующая теорема.

Теорема 6. *Базисными фундаментальными векторными полями главного расслоения $P^r(M)$ являются векторные поля*

$$E^{\beta_1\ldots\beta_a}_{\alpha} = \sum_{b=a}^{r} C^{a-b}_a u^i_{\alpha\gamma_1\ldots\gamma_{a-b}}\delta^{\beta_1}_{\gamma_{a-b+1}}\ldots\delta^{\beta_a}_{\gamma_a)}\partial^{\beta_i\ldots\beta_b}_i.$$

Следовательно, векторному полю

$$\bar{A} = \sum_{a=1}^{r} \bar{A}^{\beta}_{\alpha_1\ldots\alpha_a} \frac{\partial}{\partial A^{\beta}_{\alpha_1\ldots\alpha_a}}$$

соответствует фундаментальное векторное поле $\lambda(\bar{A})$, для которого

$$\lambda(\bar{A})\big|_X = \sum_{a=1}^{r} \bar{A}^{\alpha}_{\beta_1\ldots\beta_a} E^{\beta_1\ldots\beta_a}_{\alpha}.$$

Связностью на главном расслоении $P^r(M)$ назовем такую 1-форму ω, которая обладает следующими свойствами:

1) $R^*_A\omega = Ad(A^{-1})\omega,\ \forall A \in L^r_n$;

2) $\omega(\lambda(\bar{A})) = \bar{A}, \forall \bar{A} \in L(L^r_n)$.

Из этого определения следует, что связность на расслоении $P^r(M)$ определяется такими функциями (коэффициентами связности $\Gamma^i_{j_1\ldots j_a}$ $(a = 2,\ldots,r+1)$, что

$$u^i_{\alpha_1\ldots\alpha_a\alpha_{a+1}} = \sum_{b=1}^{a} \Gamma^i_{j_1\ldots j_b j_{b+1}} u^{j_1\ldots j_b}_{\alpha_1\ldots\alpha_a} u^{j_{b+1}}_{\alpha_{a+1}},$$

где $a = 1,\ldots,r-1$.

Литература

[1] К. В. Навицкис, Связности в расслоениях полуголономных r-реперов, *Lietuvos matematikų draugijos mokslo darbai*, 3, 187–192 (1999).

Geometry of frame bundles

K. Navickis

In this article we define the canonical forms on the principal bundle of holonomic frames of order r, give structure equations for these forms and determine the connection of order r.