Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 155–160

Apie trečios eilės liestinių sluoksniuočių geometriją

Edmundas MAZĖTIS (VPU)
el. paštas: edmundas@ vpu.lt

1. Trečios eilės liestinės sluoksniuotės

Sakykime, kad V_n – n-matė glodi daugdara, (x^i) – jos lokaliosios koordinatės, kurios keičiasi pagal dėsnį

$$\bar{x}^i = f^i\left(x^k\right). \tag{1.1}$$

Nagrinėsime glodžias funkcijas $F\colon R \to V_n$ ir šių funkcijų klasėje apibrėšime ekvivalentumo ryšį: jei F ir G – dvi glodžios klasės C^k, $k \geqslant 3$, funkcijos, $x^i = F^i(t)$, $x^i = G^i(t)$ – jų išraiškos taško $P = F(0) = G(0)$ koordinatinėje sistemoje $(U,\ x^i)$, tai funkcijas F ir G vadinsime ekvivalenčiomis taške P, jei jos tenkina sąlygas

$$\begin{gathered} F^i(0) = G^i(0), \quad \frac{\mathrm{d}F^i(0)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}G^i(0)}{\mathrm{d}t}, \\ \frac{\mathrm{d}^2F^i(0)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2G^i(0)}{\mathrm{d}t^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^3F^i(0)}{\mathrm{d}t^3} = \frac{\mathrm{d}^3G^i(0)}{\mathrm{d}t^3}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Funkcijos F ekvivalentumo klasę taške P žymėsime $J_p^3(F)$ ir vadinsime daugdaros V_n 3-džetu taške P. Nesunkiai patikriname, kad 3-džetų aibė taške P J_p^3 yra vektorinė erdvė. Pažymėkime $T^3V_n = \bigcup_{P\in V_n} J_p^3$ ir apibrėžkime projekciją $\pi\colon T^3V_n \to V_n$ šitaip: $\pi\left(J_p^3\right) = P$. Tuomet trejetas $\left(T^3V_n,\ V_n,\ \pi\right)$ bus glodi sluoksniuotė virš bazės V_n su sluoksniu kiekviename taške – džetų aibe J_p^3. Bazės V_n koordinačių keitimosi dėsnis (1.1) indukuoja tokius sluoksniuotės T^3V_n lokaliųjų koordinačių $y^i = \frac{\mathrm{d}F^i}{\mathrm{d}t}$, $z^i = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2F^i}{\mathrm{d}t^2}$, $u^i = \frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}^3F^i}{\mathrm{d}t^3}$ keitimosi dėsnius

$$\begin{gathered} \bar{y}^{\,i} = f_k^i y^k, \quad \bar{z}^{\,i} = f_k^i z^k + \frac{1}{2} f_{kh}^i y^k y^h, \\ \bar{u}^{\,i} = f_k^i u^k + f_{kh}^i y^k z^h + \frac{1}{6} x_{khp}^i y^k y^h y^p, \end{gathered} \tag{1.3}$$

čia $f_k^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}$, $f_{kh}^i = \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^h}, \ldots, g_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}$, $g_{kh}^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^h}, \ldots$ ir $f_k^i g_j^k = \delta_j^i$.

Sluoksniuota erdvė T^3V_n yra vadinama trečiosios eilės liestine sluoksniuote virš daugdaros V_n (žr. [1]). Šios sluoksniuotės lokaliosios koordinatės $(x^i,\ y^i,\ z^i,\ u^i)$, kurios keičiasi pagal (1.3) dėsnius, yra Pfaffo sistemos $\omega^i = 0$, $\theta^i = 0$, $\overset{1}{\vartheta}{}^i = 0$, $\overset{2}{\vartheta}{}^i = 0$ sprendiniai. Tiesiškai nepriklausomos 1-formos ω^i, θ^i, $\overset{1}{\vartheta}{}^i$, $\overset{2}{\vartheta}{}^i$ tenkina tokias lygybes

$$\begin{aligned}
&D\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i_k, \quad D\theta^i = \theta^k \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \theta^i_k,\\
&D\overset{1}{\vartheta}{}^i = \overset{1}{\vartheta}{}^k \wedge \omega^i_k + \theta^k \wedge \theta^i_k + \omega^k \wedge \overset{1}{\vartheta}{}^i_k,\\
&D\overset{2}{\vartheta}{}^i = \overset{2}{\vartheta}{}^k \wedge \omega^i_k + \overset{1}{\vartheta}{}^k \wedge \theta^i_k + \theta^k \wedge \overset{1}{\vartheta}{}^i_k + \omega^k \wedge \overset{2}{\vartheta}{}^i_k.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Šios lygtys yra vadinamos sluoksniuotos erdvės T^3V_n struktūrinėmis lygtimis. Diferencijuodami (1.1) ir (1.3) lygybes, gausime, kad

$$\begin{aligned}
d\bar{x}^i &= f^i_k dx^k, \quad d\bar{y}^i = f^i_{kh} y^k dx^h + f^i_k dy^k,\\
d\bar{z}^i &= f^i_k dz^k + \left(f^i_{kh} z^h + \tfrac{1}{2} f^i_{khp} y^h y^p\right) dx^k + f^i_{kh} y^k dy^h,\\
d\bar{u}^i &= \left(f^i_{kh} u^k + f^i_{khp} y^h z^p + \tfrac{1}{6} f^i_{khpq} y^h y^p y^q\right) dx^k\\
&\quad + \left(f^i_{kh} z^h + \tfrac{1}{2} f^i_{khp} y^h y^p\right) dy^k + f^i_{kh} y^h dz^k + f^i_k du^k.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Pažymėję diferencijavimo operatorius $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial'_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$, $\partial''_i = \frac{\partial}{\partial z^i}$, $\partial'''_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$, gausime tokius jų keitimosi dėsnius:

$$\begin{aligned}
\partial_k &= f^i_k \bar{\partial}_i + f^i_{kh} y^h \bar{\partial}_i + \left(f^i_{kh} z^h + \tfrac{1}{2} f^i_{khp} y^h y^p\right) \bar{\partial}''_i\\
&\quad + \left(f^i_{kh} u^h + f^i_{khp} y^h y^p + \tfrac{1}{6} f^i_{khpq} y^h y^p y^q\right) \bar{\partial}'''_i,\\
\partial'_k &= f^i_k \bar{\partial}_i + f^i_{kh} y^h \bar{\partial}''_i + \left(f^i_{kh} z^h + \tfrac{1}{2} f^i_{khp} y^h y^p\right) \bar{\partial}'''_i,\\
\partial''_k &= f^i_k \bar{\partial}''_i + f^i_{kh} y^h \bar{\partial}'''_i, \quad \partial'''_k = f^i_k \bar{\partial}'''_i.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

2. Erdvės T^3V_n tiesinės sietys

Sakoma, kad erdvėje T^3V_n yra apibrėžtas tiesinės kosieties objektas, jei jos koliestinėse erdvėse apibrėžti poerdviai, kurių bazės yra invariantinės koordinačių keitimų (1.1) ir (1.3) atžvilgiu (žr. [2]). Sakykime, kad

$$\begin{aligned}
&Dy^i = dy^i + \Gamma^i_k dx^k, \quad Dz^i = dz^i + \Gamma^i_k dy^k + M^i_k dx^k,\\
&Du^i = du^i + \Gamma^i_k dz^k + M^i_k dy^k + N^i_k du^k
\end{aligned} \tag{2.1}$$

yra minėtų poerdvių baziniai kovektoriai. Jie yra invariantiniai koordinačių keitimosi atžvilgiu tada ir tik tada, kai komponentės $\Gamma^i_k(x^h, y^h, z^h, u^h)$, $M^i_k(x^h, y^h, z^h, u^h)$ ir $N^i_k(x^h, y^h, z^h, u^h)$ yra diferencialinių lygčių sistemos

$$d\Gamma^i_j - \Gamma^i_k \omega^k_j + \Gamma^k_j \omega^i_k - \theta^i_j \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, \omega^k, \theta^k, \overset{1}{\vartheta}{}^k, \overset{2}{\vartheta}{}^k\right),$$

$$\mathrm{d}M^i_j - M^i_k\omega^k_j + M^k_j\omega^i_k - \Gamma^i_k\theta^k_j - \overset{1}{\vartheta}{}^i_j \equiv 0 \left(\operatorname{mod}\omega^k, \theta^k, \overset{1}{\vartheta}{}^k, \overset{2}{\vartheta}{}^k\right), \tag{2.2}$$

$$\mathrm{d}N^i_j - N^i_k\omega^k_j + N^k_j\omega^i_k - \Gamma^i_k\,\overset{1}{\vartheta}{}^k_j - M^i_k\theta^k_j - \overset{2}{\vartheta}{}^i_j \equiv 0 \left(\operatorname{mod}\omega^k, \theta^k, \overset{1}{\vartheta}{}^k, \overset{2}{\vartheta}{}^k\right)$$

sprendiniai; čia užrašas $\equiv 0(\operatorname{mod}\omega^k,\ \theta^k,\ \overset{1}{\vartheta}{}^k,\ \overset{2}{\vartheta}{}^k)$ reiškia, kad kairiojoje šių lygybių pusėje esantys reiškiniai tiesiškai išsireiškia per 1-formas ω^k, θ^k, $\overset{1}{\vartheta}{}^k$, $\overset{2}{\vartheta}{}^k$. Diferencialinio-geometrinio objekto $(\Gamma^i_j,\ M^i_j,\ N^i_j)$ komponentės yra vadinamos trečiosios eilės liestinių sluoksniuočių tiesinės kosieties objekto komponentėmis.

Sakoma, kad erdvėje T^3V_n yra apibrėžta tiesinė sietis, jei šios erdvės liestinėse erdvėse nurodyti poerdviai su invariantinėmis koordinačių keitimų (1.1) ir (1.3) atžvilgiu bazėmis, papildantys poerdvį $\left\{\partial_i'''\right\}$ iki visos liestinės erdvės. Apibrėžkime bazinio diferencijavimo operatorius – minėtų poerdvių bazinius vektorius šiomis lygybėmis

$$\begin{aligned}
\partial^\Gamma_i &= \partial_i - \Gamma^k_i\partial'_k - \overset{*}{M}{}^k_i\partial''_k - \overset{*}{N}{}^k_i\partial'''_k,\\
\partial'^\Gamma_i &= \partial'_i - \Gamma^k_i\partial''_k - \overset{*}{M}{}^k_i\partial'''_k,\\
\partial''^\Gamma_i &= \partial''_i - \Gamma^k_i\partial'''_k,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

čia

$$\begin{aligned}
\overset{*}{N}{}^i_j &= N^i_j - M^i_k\Gamma^k_j - \Gamma^i_k\left(M^k_j - \Gamma^k_h\Gamma^h_j\right),\\
\overset{*}{M}{}^i_j &= M^i_j - \Gamma^i_k\Gamma^k_j.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Kaip išplaukia iš (1.6) ir (2.2) lygybių, baziniai operatoriai (2.3) keičiasi pagal dėsnius

$$\partial^\Gamma_i = g^k_i\partial^\Gamma_k,\quad \partial'^\Gamma_i = g^k_i\partial'^\Gamma_k,\quad \partial''^\Gamma_i = g^k_i\partial''^\Gamma_k. \tag{2.5}$$

Diferencialinio-geometrinio objekto $(\Gamma^i_j,\ \overset{*}{M}{}^i_j,\ \overset{*}{N}{}^i_j)$ komponentės yra vadinamos erdvės T^3V_n tiesinės sieties objekto komponentėmis. Iš (2.4) lygybių išplaukia, kad tiesinės kosieties objekto komponentės apibrėžia tiesinės sieties objekto komponentes ir atvirkščiai.

3. Indukuotosios tiesinės sietys

Kaip jau parodyta, erdvės T^3V_n tiesinę sietį apibrėžia 3n funkcijų Γ^i_j, M^i_j, N^i_j, apibrėžtų erdvės T^3V_n taškuose ir tenkinančių (2.2) diferencialines lygtis. Atskirais atvejais pavyksta gerokai sumažinti tokių komponenčių skaičių. Vienas iš tokių atvejų yra tada, kai liestinėje sluoksniuotėje TV_n jau apibrėžtas tiesinės sieties objektas $\Gamma^i_j\left(x^k,\ y^k\right)$, kurio komponentės keičiasi pagal dėsnį

$$\overline{\Gamma}{}^i_j = f^i_k g^h_j \Gamma^k_h + g^h_j f^i_{kh} y^k. \tag{3.1}$$

Pažymėję $\widetilde{\partial}_k = \partial_k - \Gamma^p_k \partial'_p$, iš čia gauname

$$
\begin{aligned}
f^i_{kh} y^h &= f^i_h \Gamma^h_k - f^h_k \overline{\Gamma}{}^{\,i}_{h}, \\
f^i_{kh} &= f^i_p \partial'_k \Gamma^p_h - f^p_h f^q_k \partial'_q \overline{\Gamma}{}^{\,i}_{p}, \\
f^i_{khp} y^k &= f^i_{kh} \Gamma^k_p + f^i_{kp} \Gamma^k_h - f^i_k \widetilde{\partial}_p \Gamma^k_p - f^k_{hp} \overline{\Gamma}{}^{\,i}_{k} - f^k_h f^q_p \widetilde{\partial}_q \overline{\Gamma}{}^{\,i}_{p}, \\
f^i_{khpq} y^k &= f^i_{khp} \Gamma^k_q + f^i_{khq} \Gamma^k_p + f^i_{kh} \widetilde{\partial}_q \Gamma^k_p + f^i_{kpq} \Gamma^k_h + f^i_{kp} \widetilde{\partial}_q \Gamma^k_h \\
&\quad + f^i_{kq} \widetilde{\partial}_p \Gamma^k_p + f^i_k \widetilde{\partial}{}^{\,2}_{pq} \Gamma^k_h - f^k_{hpq} \overline{\Gamma}{}^{\,i}_{k} - f^k_{hp} f^l_q \widetilde{\partial}_l \overline{\Gamma}{}^{\,i}_{k} \\
&\quad - f^k_{hq} f^l_p \widetilde{\partial}_l \overline{\Gamma}{}^{\,i}_{k} - f^k_h f^l_{pq} \widetilde{\partial}_l \overline{\Gamma}{}^{\,i}_{k} - f^k_h f^l_p f^s_q \widetilde{\partial}{}^{\,2}_{sl} \overline{\Gamma}{}^{\,i}_{k}.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Įstatę šias išraiškas į (1.5) lygybių trečiąją tapatybę ir atlikę skaičiavimus, gausime

$$
\mathrm{d}\bar{z}^{\,i} + \overline{\Gamma}{}^{\,i}_{k} \mathrm{d}\bar{y}^{\,k} + \overline{M}{}^{i}_{k} \mathrm{d}\bar{x}^k = f^i_h \left(\mathrm{d}z^h + \Gamma^h_k \mathrm{d}y^k + M^h_k \mathrm{d}x^k \right), \tag{3.3}
$$

čia

$$
M^i_j = \frac{1}{2} \partial_k \Gamma^i_j y^k + \partial'_k \Gamma^i_j z^k + \frac{1}{2} \Gamma^i_k \Gamma^k_j. \tag{3.4}
$$

Analogiškai iš paskutinės (1.5) lygybės išplaukia, kad teisinga tapatybė

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\bar{u}^{\,i} + \overline{\Gamma}{}^{\,i}_{k} \mathrm{d}\bar{y}^{\,k} + \overline{M}{}^{\,i}_{k} \mathrm{d}\bar{y}^{\,k} + \overline{N}{}^{\,i}_{k} \mathrm{d}\bar{x}^k \\
&= f^i_h \left(\mathrm{d}u^h + \Gamma^h_k \mathrm{d}z^k + M^h_k \mathrm{d}y^k + N^h_k \mathrm{d}x^k \right),
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

čia

$$
\begin{aligned}
N^i_j &= \partial'_k \Gamma^i_j u^k + \Gamma^i_k M^k_j + \partial_j \Gamma^i_k z^k - \partial'_j \Gamma^p_h \Gamma^i_p z^h \\
&\quad - \frac{1}{3} \Gamma^h_j \widetilde{\partial}_k \Gamma^i_h y^k - \frac{1}{6} \Gamma^i_h \widetilde{\partial}_j \Gamma^h_k y^k + \frac{1}{6} \widetilde{\partial}{}^{\,2}_{kj} \Gamma^i_h y^k y^h.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Pasinaudoję (2.4), (3.4) ir (3.6) lygybėmis ir atlikę skaičiavimus gausime, kad bazinio diferencijavimo operatoriai (2.3) tenkina (2.5) tapatybėmis išreikštus keitimosi dėsnius. Taigi, įrodėme, kad teisinga tokia teorema:

3.1 teorema. *Jei glodžios daugdaros V_n liestinėje sluoksniuotėje TV_n apibrėžta tiesinė sietis, kurios komponentės Γ^i_j keičiasi pagal* (3.1) *dėsnį, tai* (3.4) *ir* (3.6) *lygybėmis apibrėžiamas sluoksniuotės T^3V_n diferencialinis geometrinis tiesinės sieties objektas $(\Gamma^i_j,\ M^i_j,\ N^i_j)$, kurio komponentės tenkina* (2.2) *diferencialinių lygčių sistemą.*

Taip sukonstruota trečiosios eilės liestinės sluoksniuotės T^3V_n tiesinė sietis $(\Gamma^i_j,\ M^i_j,\ N^i_j)$ yra vadinama indukuotąja tiesine sietimi.

4. Erdvės T^3V_n afininės sietys

Sakykime, kad trečiosios eilės liestinėje sluoksniuotėje kokiu tai būdu apibrėžtas tiesinės sieties diferencialinis-geometrinis objektas, kurio komponentės $\Gamma^i_j(x^k, y^k, z^k, u^k)$, $M^i_j(x^k, y^k, z^k, u^k)$ ir $N^i_j(x^k, y^k, z^k, u^k)$ tenkina (2.2) diferencialinių lygčių sistemą. Panagrinėkime objektus, kurių komponentės $\overset{1}{\Gamma}{}^i_{jk}$, $\overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk}$ ir $\overset{3}{\Gamma}{}^i_{jk}$ apibrėžiamos lygybėmis

$$\begin{aligned}
\overset{1}{\Gamma}{}^i_{jk} &= \partial'_j\Gamma^i_k - \partial''_k\Gamma^i_h\Gamma^h_j - \partial'''_h\Gamma^i_k \overset{*}{M}{}^h_j, \\
\overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk} &= \partial''_k M^i_j - \partial''_k\Gamma^i_h\Gamma^h_j - \partial'''_h M^i_j\Gamma^h_k + \partial'''_h\Gamma^i_p\Gamma^p_j\Gamma^h_k, \\
\overset{3}{\Gamma}{}^i_{jk} &= \partial'''_j N^i_k - \partial'''_k M^i_h\Gamma^h_j - \partial'''_k\Gamma^i_h \overset{*}{M}{}^h_j.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Remiantis (2.2) lygybėmis nesunkiai patikrinama, kad šie objektai yra diferencialinės lygties

$$d\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{pk}\omega^p_j - \Gamma^i_{jp}\omega^p_k + \Gamma^p_{jk}\omega^i_p - \omega^i_{jk} \equiv 0 \left(\operatorname{mod}\omega^p, \theta^p, \overset{1}{\vartheta}{}^p, \overset{2}{\vartheta}{}^p\right) \tag{4.2}$$

sprendiniai. Ši lygtis yra klasikinio afininės sieties objekto diferencialinė lygtis (žr. [2]). Todėl objektai $\overset{1}{\Gamma}{}^i_{jk}$, $\overset{2}{\Gamma}{}^i_{jk}$ ir $\overset{3}{\Gamma}{}^i_{jk}$ yra vadinami sluoksniuotės T^3V_n indukuotosios afininės sieties objektais. Taigi, teisinga tokia teorema:

4.1 teorema. *Trečios eilės liestinės sluoksniuotės tiesinės sieties objektas* $\left(\Gamma^i_j,\ M^i_j,\ N^i_j\right)$ *pagal* (4.1) *formules indukuoja tris afininės sieties objektus.*

Jei

$$\begin{aligned}
\widetilde{\theta}{}^i &= \theta^i + \Gamma^i_k\omega^k, \\
\widetilde{\overset{1}{\vartheta}}{}^i &= \overset{1}{\vartheta}{}^i + \Gamma^i_k\theta^k + M^i_k\omega^k, \\
\widetilde{\overset{2}{\vartheta}}{}^i &= \overset{2}{\vartheta}{}^i + \Gamma^i_k\overset{1}{\vartheta}{}^k + M^i_k\theta^k + N^i_k\omega^k
\end{aligned} \tag{4.3}$$

tiesinės sieties invariantinės 1-formos, o

$$\overset{\alpha}{\widetilde{\omega}}{}^i_j = \omega^i_j + \overset{\alpha}{\Gamma}{}^i_{jk}\omega^k, \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{4.4}$$

afininių siečių invariantinės 1-formos, tai

$$
\begin{aligned}
D\widetilde{\theta}^{\,i} &= \widetilde{\theta}^{\,k}\wedge \overset{1}{\widetilde{\omega}}{}^i_k + R^i_{pq}\omega^p\wedge\omega^q + K^i_{pq}\overset{1}{\widetilde{\vartheta}}{}^p\wedge\omega^q + L^i_{pq}\overset{2}{\widetilde{\vartheta}}{}^p\wedge\omega^q,\\
D\overset{1}{\widetilde{\vartheta}}{}^i &= \overset{1}{\widetilde{\vartheta}}{}^k\wedge \overset{2}{\widetilde{\omega}}{}^i_k + H^i_{pq}\omega^p\wedge\omega^q + N^i_{pq}\widetilde{\theta}^p\wedge\omega^q + F^i_{pq}\widetilde{\theta}^p\wedge\widetilde{\theta}^q\\
&\quad + M^i_{pq}\overset{2}{\widetilde{\vartheta}}{}^p\wedge\omega^q + K^i_{pq}\overset{1}{\widetilde{\vartheta}}{}^p\wedge\theta^q + L^i_{pq}\overset{2}{\widetilde{\vartheta}}{}^p\wedge\widetilde{\theta}^{\,q},\\
D\overset{2}{\widetilde{\vartheta}}{}^i &= \overset{2}{\widetilde{\vartheta}}{}^k\wedge \overset{3}{\widetilde{\omega}}{}^i_k + P^i_{pq}\omega^p\wedge\omega^q + Q^i_{pq}\widetilde{\theta}^p\wedge\omega^q + U^i_{pq}\overset{1}{\widetilde{\vartheta}}{}^p\wedge\omega^q\\
&\quad + W^i_{pq}\widetilde{\theta}^p\wedge\widetilde{\theta}^q + E^i_{pq}\overset{1}{\widetilde{\vartheta}}{}^p\wedge\widetilde{\theta}^q + K^i_{pq}\overset{1}{\widetilde{\theta}}{}^p\wedge\overset{2}{\widetilde{\vartheta}}{}^q\\
&\quad + M^i_{pq}\overset{2}{\widetilde{\vartheta}}{}^p\wedge\widetilde{\theta}^{\,q} + L^i_{pq}\overset{2}{\widetilde{\vartheta}}{}^p\wedge\overset{1}{\widetilde{\vartheta}}{}^q,\\
D\overset{\alpha}{\widetilde{\omega}}{}^i_j &= \overset{\alpha}{\widetilde{\omega}}{}^i_k\wedge\overset{\alpha}{\widetilde{\omega}}{}^k_j + \overset{\alpha}{R}{}^i_{jpq}\omega^p\wedge\omega^q + \overset{\alpha}{K}{}^i_{jpq}\widetilde{\theta}^p\wedge\omega^q + \overset{\alpha}{S}{}^i_{jpq}\overset{1}{\widetilde{\vartheta}}{}^p\wedge\omega^q\\
&\quad + \overset{\alpha}{L}{}^i_{jpq}\overset{2}{\widetilde{\vartheta}}{}^p\wedge\omega^q.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Šios lygtys yra vadinamos erdvės T^3V_n su tiesine sietimi $(\Gamma^i_j,\ M^i_j,\ N^i_j)$ ir indukuotomis afininėmis sietimis (4.1) struktūrinėmis lygtimis. Dydžiai R^i_{pq}, K^i_{pq}, L^i_{pq}, H^i_{pq}, N^i_{pq}, F^i_{pq}, M^i_{pq}, P^i_{pq}, Q^i_{pq}, U^i_{pq}, W^i_{pq}, E^i_{pq} yra tiesinės sieties kreivumo tenzoriai, o $\overset{\alpha}{R}{}^i_{jpq}$, $\overset{\alpha}{K}{}^i_{jpq}$, $\overset{\alpha}{S}{}^i_{jpq}$, $\overset{\alpha}{L}{}^i_{jpq}$ – afininių siečių $\overset{\alpha}{\Gamma}{}^i_{jp}$ kreivumo tenzoriai.

Literatūra

[1] K. Yano, Sh. Ishihara, *Tangent and cotangent bundles, Differential Geometry*, New-York (1973).

[2] V. Bliznikas, Neholonominiai Lie diferencijavimai ir tiesinės sietys atraminių elementų erdvėje, *Liet. Matem. Rink.*, **6**(2), 141–209 (1966) (rusų kalba).

Zur Geometrie Tangentbündeln der dritter Ordnung

E. Mazėtis

Diese Arbcit ist der Theorie der lineare und affine Zussammenhängen in Tangentbündeln der dritter Ordnung gewidmet. Beweisst man, dass linear Zussammenhang drei Objekte affiner Zussammenhängen induziert, findet man die strukturische Gleichungen und Krümmungsobjekten dieser Bündeln.