Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 149–154

Об аффинных связностях на касательных расслоениях и их сечениях

Ангеле БАШКЕНЕ (ШУ)
e-mail: baskiene@fm.su.lt

На касательное расслоение $T(M_n)$ n-мерного дифференцируемого многообразия M_n можно смотреть как на n-мерное дифференцируемое многообразие над алгеброй комплексных, двойных или дуальных чисел. В настоящей работе для изучения соотношения между связностями на $T(M_n)$ и на их сечениях используется алгебра $R(\epsilon)$ дуальных чисел [1].

1. Рассмотрим алгебру $R(\epsilon)$ дуальных чисел $x+\epsilon y$, $x, y \in R$, $\epsilon^2 = 0$, структурный тензор γ^c_{ab} $(a, b, ... = 1, 2)$ которой имеет координаты

$$\gamma^1_{11} = \gamma^2_{12} = \gamma^2_{21} = 1, \quad \gamma^2_{11} = \gamma^1_{12} = \gamma^1_{21} = \gamma^1_{22} = \gamma^2_{22} = 0. \tag{1}$$

Произвольная аналитическая, т.е. дифференцируемая, дуальная функция $F(X^i)$ n дуальных переменных $X^i = x^i + \epsilon y^i$ $(i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, n)$ имеет вид

$$F(X^i) = f(x^i) + \epsilon\left(y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} + A(x^i)\right), \tag{2}$$

где $f(x^i), A(x^i)$ – произвольные дифференцируемые действительные функции n действительных переменных x^i.

Аналитическое продолжение F^* действительной функции $f(x^i)$ n действительных переменных x_i в алгебру $R(\epsilon)$ получим при $A(x^i) = 0$:

$$F^*(X^i) = f(x^i) + \epsilon y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}. \tag{3}$$

Рассмотрим n-мерное дифференцируемое многообразие $M_n(x^i)$ и ее касательное расслоение $T(M_n)(x^A)$, $A, B, \ldots = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n$, где x^i – координаты точки $x \in M_n$ в локальной системе координат, x^{n+i} – координаты вектора $\vec{v}_x$ в той же системе координат.

На $T(M_n)$ можно смотреть как на n-мерное гладкое, т.е. дифференцируемое, многообразие $M_n^{R(\epsilon)}$ над алгеброй $R(\epsilon)$ дуальных чисел. Действительно, каждой точке $(x^A) = (x^i, x^{n+i}) \in T(M_n)$ поставим в соответсвие элементы $X^i = x^i + \epsilon x^{n+i}$ алгебры $R(\epsilon)$. При переходе на базе M_n к новым локальным координатам $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$ на $T(M_n)$ получим преобразование локальных координат x^A по формулам

$$\begin{aligned} x^{i'} &= x^{i'}(x^j), \\ x^{(n+i)'} &= x^{n+j}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

На $M_n^{R(\epsilon)}(X^i)$ мы переходим к новым голоморфным координатам $X^{i'} = x^{i'}(x^i) + \epsilon \cdot x^{n+j}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}$, являющимся аналитическими продолжениями функций $x^{i'}(x^j)$ в алгебру $R(\epsilon)$.

Следовательно, $T(M_n)(x^A)$ является действительной моделью пространства $M_n^{R(\epsilon)}(X^i)$.

Рассмотрим на $M_n^{R(\epsilon)}$ $R(\epsilon)$-гладкую связность [1]:

$$\widetilde{\Gamma}^i_{jk}(X^l) = {}^1\widetilde{\Gamma}^i_{jk} + \epsilon\left({}^2\widetilde{\Gamma}^i_{jk}\right) = \Gamma^i_{jk}(x^l) + \epsilon\left(x^{n+l}\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + T^i_{jk}(x^l)\right), \tag{4}$$

где Γ^i_{jk} – коэффициенты аффинной связности, T^i_{jk} – тензорное поле на базе M_n. Тогда на касательном расслоении $T(M_n)$ возникает объект аффинной связности Ω^A_{BC} [1], где

$$\Omega^{ia}_{jbkc} = {}^d\widetilde{\Gamma}^i_{jk}\gamma^a_{dh}\gamma^h_{bc}, \quad a, b, \ldots, = 1, 2, \quad i1 = i, \quad i2 = n + i. \tag{5}$$

Компоненты этой связности в силу (1), (4) имеют вид:

$$\Omega^i_{jk} = \Omega^{n+i}_{j,n+k} = \Omega^{n+i}_{n+j,k} = \Gamma^i_{jk}, \quad \Omega^{n+i}_{jk} = x^{n+l}\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + T^i_{jk}, \tag{6}$$

остальные $\Omega^{ia}_{jbkc} = 0$.

При $T^i_{jk}(x^l) = 0$ получим польный лифт аффинной связности Γ. Этот лифт является действительной реализацией связности $\widetilde{\Gamma}$, полученной аналитическим продолжением связности Γ в $R(\epsilon)$.

2. Сечение $\sigma\colon M_n \to T(M_n)$ касательного расслоения $T(M_n)$ зададим уравнением

$$x^{n+i} = \sigma^i(x^j). \tag{7}$$

Пусть на $T(M_n)$ дана связность Ω^A_{BC} (6). Оснастим секущую поверхность $\sigma(M_n)$ (7) вертикальными площадками, т.е. касательными пространствами к слою.

Условие параллельного переноса в индуцированной связности $G^i_{jk}(x^l)$ имеет вид [2]:

$$\partial_k x^A_i - G^l_{ki}x^A_l + \Omega^A_{CB}x^C_k x^B_i = \sum_j b^{n+j}_{ik} n^A_{n+j}, \tag{8}$$

где

$$x_i^A = \delta_i^A + \frac{\partial \sigma^j}{\partial x^i}\delta_{n+j}^A, \quad n_{n+j}^A = \delta_{n+j}^A. \tag{9}$$

Из (8) при $A = j$ в силу (6), (9) имеем $-G_{ki}^j + \Omega_{CB}^j x_k^C x_i^B = 0$, откуда $G_{ki}^j = \Gamma_{ki}^j$.

Итак, если на касательном расслоении задана $R(\epsilon)$-гладкая связность, то на сечении $\sigma(M_n)$ при вертикальном оснащении индуцированная связность совпадает со связносью на базе.

Найдем необходимые и достаточные условия для того, чтобы сечение $\sigma(M_n)$ было автопараллельным, т.е., чтобы для каждого вектора $\vec{v} \in T_x(\sigma(M_n))$ и каждой кривой κ в $\sigma(M_n)$, проходящей через точку $x \in \sigma(M_n)$, параллельный перенос вектора $\vec{v}$ вдоль кривой приводит к вектору, касательному к $\sigma(M_n)$. В формулах (8) полагая $b_{ij}^{n+k} = 0$, при $A = n + j$ получим

$$\frac{\partial^2 \sigma^j}{\partial x^k \partial x^i} + \Omega_{CB}^{n+j} x_k^C x_i^B - G_{ki}^l \frac{\partial \sigma^j}{\partial x^l} = 0.$$

Учитывая $G_{ki}^l = \Gamma_{ki}^l$ и (6), имеем:

$$\frac{\partial^2 \sigma^j}{\partial x^i \partial x^k} + \Gamma_{km}^j \frac{\partial \sigma^m}{\partial x^i} + \Gamma_{li}^j \frac{\partial \sigma^l}{\partial x^k} + \sigma^l \frac{\partial \Gamma_{ki}^j}{\partial x^l} + T_{ki}^j - \Gamma_{ki}^l \frac{\partial \sigma^j}{\partial x^l} = 0. \tag{10}$$

Теорема. *Необходимые и достаточные условия автопараллельности сечения* σ (7) *являются* (10) *формулы.*

Например, в связности полного лифта ($T_{ki}^j = 0$) нулевое сечение ($\sigma^l = 0$) является автопараллельным. Если $M_n = R^n(\Gamma_{jk}^i = 0)$, то в связности полного лифта условие автопараллельности сечения $\sigma(M_n)$ (7) имеет вид $\frac{\partial^2 \sigma_j}{\partial x^i \partial x^k} = 0$. Отсюда имеем уравнения всех автопараллельных сечений: $\sigma^j = C_k^j x^k + C^j$, C_k^j, C^j – постоянные.

3. Будем искать аналитическое продолжение дуальныой функции $f(x^i) = f^1(x^i) + \epsilon f^2(x^i)$, заданной на сечении $\sigma(M_n)$, т.е. такую $R(\epsilon)$-гладкую функцию $F(X^i)$, которая вдоль сечения совпадает с данной функцией.

Произвольная $R(\epsilon)$-дифференцируемая функция имеет (2) вид:

$$F(X^i) = a(x^i) + \epsilon\left(x^{n+j}\frac{\partial a}{\partial x^j} + b(x^i)\right), \quad X^i = x^i + \epsilon x^{n+i}.$$

Так как

$$F(X^i)_{|\sigma} = a(x^i) + \epsilon\left(\sigma^j \frac{\partial a}{\partial x^j} + b(x^i)\right) = f^1(x^i) + \epsilon f^2(x^i),$$

то

$$a(x^i) = f^1(x^i), \quad b(x^i) = f^2(x^i) - \sigma^j \frac{\partial f^1}{\partial x^j},$$

$$F(X^i) = f^1(x^i) + \epsilon \left(x^{n+j} \frac{\partial f^1(x^i)}{\partial x^j} + f^2(x^i) - \sigma^j \frac{\partial f^1}{\partial x^j} \right). \tag{11}$$

Пусть $\widetilde{\Gamma}^i_{jk}(X^l)$ (4) – дуальные компоненты $R(\epsilon)$-гладкой связности на касательном расслоении, а $\sigma(M_n)$ (7) – сечение $T(M_n)$. Рассмотрим компоненты этой связности вдоль сечения:

$$\widetilde{\Gamma}^i_{jk}\left(x^l + \epsilon\sigma^l(x^m)\right) = {}^{\sigma}\widetilde{\Gamma}^i_{jk}(x^l) = {}^1\Sigma^i_{jk}(x^l) + \epsilon\left({}^2\Sigma^i_{jk}(x^l)\right).$$

Так как в силу (4)

$${}^{\sigma}\widetilde{\Gamma}^i_{jk}(x^l) = \Gamma^i_{jk}(x^l) + \epsilon\left(\sigma^l \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + T^i_{jk}(x^l)\right),$$

то

$$\Gamma^i_{jk} = {}^1\Sigma^i_{jk}, \quad T^i_{jk} = {}^2\Sigma^i_{jk} - \sigma^l \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}.$$

Применяя (11), находим аналитические продолжения функций ${}^{\sigma}\widetilde{\Gamma}_{jk}(x^l)$:

$$\begin{aligned} &{}^1\Sigma^i_{jk} + \epsilon\left(x^{n+l}\frac{\partial^1\Sigma^i_{jk}}{\partial x^l} + {}^2\Sigma^i_{jk} - \sigma^l\frac{\partial^1\Sigma^i_{jk}}{\partial x^l}\right) \\ &= \Gamma^i_{jk} + \epsilon\left(x^{n+l}\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + T^i_{jk}\right) = \widetilde{\Gamma}^i_{jk}(X^l). \end{aligned} \tag{12}$$

Видим, что коэффициенты $\widetilde{\Gamma}^i_{jk}(X^l)$ $R(\epsilon)$-гладкой связности получаются аналитическим продолжением дуальных функций ${}^{\sigma}\widetilde{\Gamma}^i_{jk}(x^l)$.

Согласно формуле (5) вещественные компоненты ${}^{\sigma}\Omega^{ia}_{jbkc}$ этой связности имеют вид:

$${}^{\sigma}\Omega^i_{jk} = {}^{\sigma}\Omega^{n+i}_{n+j,k} = {}^{\sigma}\Omega^{n+i}_{j,n+k} = {}^1\Sigma^i_{jk},$$

$${}^{\sigma}\Omega^{n+i}_{jk} = x^{n+l}\frac{\partial^1\Sigma^i_{jk}}{\partial x^l} + {}^2\Sigma^i_{jk} - \sigma^l\frac{\partial^1\Sigma^i_{jk}}{\partial x^l},$$

остальные ${}^{\sigma}\Omega^{ia}_{jbkc}$ равны 0.

Рассмотрим векторное расслоение $E = \bigcup\limits_{x\in\sigma(M_n)} T_x(T(M_n))$, определенное касательными пространствами к $T(M_n)$ вдоль сечения $\sigma(M_n)$. Линейную связность в таком расслоении можно задать при помощи дуальных коэффициентов ${}^{\sigma}\Theta^i_{jk}(x^l) = {}^1\Theta^i_{jk}(x^l) + \epsilon({}^2\Theta^i_{jk}(x^l))$. Вектор $V^i = v^i + \epsilon v^{n+i}$ переносится параллельно вдоль кривой $x^i = x^i(t)$, $x^{n+i} = \sigma^i(x^l(t))$, если $\mathrm{d}V^i +^{\sigma} \Theta^i_{jk}\mathrm{d}x^j V^k = 0$.

С помощью формулы (11) из коэффициентов ${}^{\sigma}\Theta^i_{jk}$ связности в E построим $R(\epsilon)$-гладкую связность $\widetilde{\Theta}^i_{jk}(X^l) = {}^1\widetilde{\Theta}^i_{jk} + \epsilon({}^2\widetilde{\Theta}^i_{jk})$ в касательном расслоении.

Вектор V^i переносится параллельно вдоль кривой $X^i = X^i(t)$, на $M_n^{R(\epsilon)}$, если

$$\frac{\partial V^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}t} + \widetilde{\Theta}^i_{jk}\frac{\mathrm{d}X^j}{\mathrm{d}t}V^k = 0.$$

Вдоль кривой на сечении $\sigma(M_n)$

$$\frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}t} +^{\sigma} \widetilde{\Theta}^i_{jk}(x^l)\frac{\partial X^j}{\partial x^l}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}V^k = 0, \qquad {}^{\sigma}\widetilde{\Theta}^i_{jk} = \widetilde{\Theta}^i_{jk}|_{\sigma} = {}^1\Xi^i_{jk} + \epsilon({}^2\Xi^i_{jk}).$$

Отсюда ${}^{\sigma}\Theta^i_{lk} =^{\sigma} \widetilde{\Theta}^i_{jk}\frac{\partial X^j}{\partial x^l}$. Так как $\frac{\partial X^j}{\partial x^l} = \delta^j_l + \epsilon\frac{\partial\sigma^j}{\partial x^l}$, то

$${}^{\sigma}\Theta^i_{lk} = \left({}^1\Xi^i_{jk} + \epsilon({}^2\Xi^i_{jk})\right)\left(\delta^j_l + \epsilon\frac{\partial\sigma^j}{\partial x^l}\right) = {}^1\Xi^i_{lk} + \epsilon\left({}^2\Xi^i_{lk} + \frac{\partial\sigma^j}{\partial x^l}{}^1\Xi^i_{jk}\right).$$

Таким образом,

$${}^1\Xi^i_{lk} = {}^1\Theta^i_{jk}, \qquad {}^2\Theta^i_{lk} = {}^2\Xi^i_{lk} + \frac{\partial\sigma^j}{\partial x^l}{}^1\Xi^i_{jk}. \tag{13}$$

Коэффициенты $\widetilde{\Theta}^i_{jk}(X^l)$ является аналитическими продолжениями функций ${}^{\sigma}\widetilde{\Theta}^i_{jk}(x^l)$, заданных на сечении. В силу (13), (12)

$$\widetilde{\Theta}^i_{jk}(X^l) = {}^1\Xi^i_{jk}(x^l) + \epsilon\left(x^{n+l}\frac{\partial^1\Xi^i_{jk}}{\partial x^l} + {}^2\Xi^i_{jk}(x^l) - \sigma^l\frac{\partial^1\Xi^i_{jk}}{\partial x^l}\right);$$

$$\widetilde{\Theta}^i_{jk} = {}^1\Theta^i_{jk} + \epsilon\left(x^{n+l}\frac{\partial^1\Theta^i_{jk}}{\partial x^l} + {}^2\Theta^i_{jk}(x^l) - \frac{\partial\sigma^l}{\partial x^j}{}^1\Theta^i_{lk} - \sigma^l\frac{\partial^1\Theta^i_{jk}}{\partial x^l}\right). \tag{14}$$

Теорема. *Связность* ${}^{\sigma}\Theta^i_{jk}(x^l)$ *на векторном расслоении* E *можно однозначно продолжить до* $R(\epsilon)$*-гладкой связности* $\widetilde{\Theta}^i_{jk}(X^l)$ *на касательном расслоении по формуле* (14).

Из формулы (5) нетрудно найти вещественные компоненты Θ^{ia}_{jbkc} этой связности:

$$\Theta^{i}_{jk} = \Theta^{n+i}_{n+j,k} = \Theta^{n+i}_{j,n+k} = {}^{1}\Theta^{i}_{jk},$$

$$\Theta^{n+i}_{jk} = x^{n+l}\frac{\partial^{1}\Theta^{i}_{jk}}{\partial x^{l}} + T^{i}_{jk},$$

$$T^{i}_{jk} = {}^{2}\Theta^{i}_{jk} - \frac{\partial\sigma^{l}}{\partial x^{j}}{}^{1}\Theta^{i}_{lk} - \sigma^{l}\frac{\partial^{1}\Theta^{i}_{jk}}{\partial x^{l}},$$

остальные $\Theta^{ia}_{jb,kc} = 0$.

Литература

[1] В.В. Вишневский, А.П. Широков, В.В. Шурыгин, *Пространства над алгебрами*, из-во КТУ (1985).

[2] А.П. Норден, *Пространства аффинной связности*, Москва, Наука (1976).

Apie liečiamųjų sluoksniuočių ir jų pjūvių afiniąsias sietis

A. Baškienė

Nagrinėjama n-matės diferencijuojamosios daugdaros M_n liečiamoji sluoksniuotė $T(M_n)$ kaip n-matės dualiosios daugdaros $M_n^{R(\epsilon)}$ realusis modelis. Daugdaros $M_n^{R(\epsilon)}$ $R(\epsilon)$-glodžioji sietis, pjūvio $\sigma(M_n)$ liečiamąsias erdves papildžius vertikaliaisiais vektoriais, indukuoja tame pjūvyje afiniąją sietį. Rastos būtinos ir pakankamos sąlygos, kad $\sigma(M_n)$ tos sieties atžvilgiu būtų autolygiagretusis pjūvis.

Nagrinėjama vektorinė sluoksniuotė E, sudaryta iš daugdaros $T(M_n)$ liečiamųjų erdvių pjūvio $\sigma(M_n)$ taškuose. Įrodyta, jog naudojant darbe sukurtą dualiųjų funkcijų, apibrėžtų pjūvio taškuose, analizinius pratęsimus į dualiųjų skaičių algebrą $R(\epsilon)$, daugdaros E afiniąją sietį galima vienareikšmiškai pratęsti iki $R(\epsilon)$-glodžios afiniosios sieties liečiamojoje sluoksniuotėje.