Liet. matem. rink., T. 40, spec. nr., 18–20

Pastaba apie Rymano ξ-funkciją

Ramūnas GARUNKŠTIS * (VU)
el. paštas: ramunas.garunkstis@maf.vu.lt

1. Įvadas

Tegu $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Rymano dzeta funkcija pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama Dirichlet eilute

$$\zeta(s) =: \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s},$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuriame ji turi polių. Rymano ξ-funkcija vadinama

$$\xi(s) =: \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s),$$

kur $\Gamma(s)$ žymi Oilerio gama funkciją. Gerai žinoma ([3]), kad $\xi(s)$ yra sveikoji pirmos eilės funkcija, reali realioje ašyje ir jai galioja funkcinė lygtis

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Garsioji Rymano hipotezė (RH) skelbia, kad visi netrivialūs $\zeta(s)$ nuliai guli tiesėje $\sigma = 1/2$. Rymano hipotezė ekvivalenti taip vadinamai pozityvumo sąlygai:

$$\Re\bigg(\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\bigg) > 0, \quad \text{kai } \sigma > \frac{1}{2}.$$

(plačiau apie tai žiūrėti [1], [2]):

Žinoma, kad ([1],[2])

$$\Re\bigg(\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\bigg) > 0, \quad \text{kai } \sigma > 1.$$

Tegul

$$h(\sigma) := \inf\bigg\{\Re\bigg(\frac{\xi'(\sigma+it)}{\xi(\sigma+it)}\bigg) : -\infty < t < \infty\bigg\}.$$

Lagarias [2], gavo tokį rezultatą.

---

*Darbas remiamas „Jaunesniojo mokslininko stipendijos“.

Teorema A.

$$h(\sigma) = \frac{\xi'(\sigma)}{\xi(\sigma)}, \quad kai \quad \sigma > 10,$$

ir pastaroji lygybė teisinga visiems $\sigma > 1/2$, jei galioja RH.

Mes įrodysime tokią teoremą.

Teorema. *Jei $\sigma > 4.5$, tai*

$$h(\sigma) = \frac{\xi'(\sigma)}{\xi(\sigma)}.$$

2. Teoremos įrodymas

Tegul $\varrho = \beta + i\gamma$ žymi netrivialų Rymano funkcijos nulį. Toliau naudojamus Rymano dzeta funkcijų teorijos faktus, jei nepasakyta kitaip, galima rasti Titchmarsh [3] monografijoje.

1 lema. *Tegul $t \neq 0$ ir $\gamma \neq 0$. Nelygybė*

$$\frac{1}{\sigma_0^2 + (t+\gamma)^2} + \frac{1}{\sigma_0^2 + (t-\gamma)^2} \geqslant \frac{2}{\sigma_0^2 + \gamma^2} \tag{1}$$

teisinga tada ir tik tada, jei

$$3\gamma^2 \geqslant \sigma_0^2 + t^2. \tag{2}$$

Be to, jei bent viena nelygybė tampa lygybe, tai ir kita.

Įrodymas. Kadangi $\gamma \neq 0$, tai (1) nelygybės dešinės pusės vardiklis nėra lygus nuliui. Jei kairės pusės bent vienas vardiklis lygus nuliui, sakysime kad nelygybė (1) teisinga. Kitu atveju, padauginę iš vardiklių, gauname, kad nelygybė (1) ekvivalenti nelygybei

$$(\sigma_0^2 + \gamma^2)(2\sigma_0^2 + 2t^2 + 2\gamma^2) \geqslant 2(\sigma_0^2 + (t+\gamma)^2)(\sigma_0^2 + (t-\gamma)^2).$$

Suprastinę gauname

$$3\gamma^2 t^2 \geqslant \sigma_0^2 t^2 + t^4.$$

Kadangi $t \neq 0$, padalinę iš t gausime (2). Pakartoję visus žingsnius atvirkščia tvarka iš (2) gausime (1).

2 lema. *Jei $1 < \sigma < 10$, tai nelygybė*

$$\Re\left(\frac{\xi'(\sigma + it)}{\xi(\sigma + it)}\right) > \frac{\xi'(\sigma)}{\xi(\sigma)} \tag{3}$$

galioja visiems $0 < |t| \leqslant 21$.

Įrodymas. Kiekvienam netrivialiam $\zeta(s)$ nuliui $\varrho = \beta + i\gamma$, turime $|\gamma| > 14.134$. Imkime $\sigma_0 = \sigma - \beta$. Žinoma, kad $0 < \beta < 1$, todėl

$$3\gamma^2 \geqslant 3(14)^2 > (10)^2 + (21)^2 = 541 \geqslant \sigma_0^2 + t^2,$$

taigi (1) teisinga su griežtu nelygybės ženklu. Žinoma, kad

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = b + \sum_{\varrho}\left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right) = \sum_{\gamma>0}\left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{s-\bar{\varrho}} + \Re\frac{1}{\varrho}\right) + b,$$

kur b yra reali konstanta. Iš čia ir 1 lemos gauname

$$\Re\left(\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\right) = (\sigma-\beta)\sum_{\gamma>0}\left(\frac{1}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} + \frac{1}{(\sigma-\beta)^2+(t+\gamma)^2}\right) + sum_{\gamma>0}\Re\frac{1}{\varrho}+b$$

$$> (\sigma-\beta)\sum_{\gamma>0}\frac{2}{(\sigma-\beta)^2+\gamma^2} + \sum_{\gamma>0}\Re\frac{1}{\varrho} + b = \frac{\xi'(\sigma)}{\xi(\sigma)}.$$

Lema įrodyta.

3 lema. *Jei* $\sigma \geqslant 4.5$ *ir* $|t| > 21$, *tai*

$$\Re\left(\frac{\xi'(\sigma+it)}{\xi(\sigma+it)}\right) > \frac{\xi'(\sigma)}{\xi(\sigma)}. \tag{4}$$

Įrodymas. Tai yra 3.6 lema iš Lagarias [2].

Teoremos įrodymas. Kai $\sigma \geqslant 10$, teoremos tvirtinimas išplaukia iš teoremos A. Iš 2 lemos gauname teoremą srityje $4.5 \leqslant \sigma < 10$, $|t| \leqslant 21$, iš 3 lemos – srityje $4.5 \leqslant \sigma < 10$, $|t| > 21$. Teorema įrodyta.

Literatūra

[1] A. Hinkhanen, On functions of bounded type, *Complex Variables*, **34**, 119–139 (1997).
[2] J.C. Lagarias, On a positivity property of the Riemann ζ-function, *Acta Arith.*, **89**(3), 217–234 (1999).
[3] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, 2^{nd} ed., revised by D.R. Heath-Brown, Oxford Universality Press (1986).

A note on the Riemann ξ-function

R. Garunkštis

We prove that for $\sigma > 4.5$,

$$\inf\left\{\Re\left(\frac{\xi'(\sigma+it)}{\xi(\sigma+it)}\right) : -\infty < t < \infty\right\} = \frac{\xi'(\sigma)}{\xi(\sigma)}.$$

This improves the result obtained by Lagarias.