

# Kubiliaus nelygybės analogas polinomų pusgrupėje

Gintautas BAREIKIS (VU)

el. paštas: *gintautas.bareikis@maf.vu.lt*

## Įvadas

Raidėmis  $\mathcal{N}, \mathcal{R}, \mathcal{C}$  žymėsime natūraliųjų, realiųjų ir kompleksinių skaičių aibes. Simboliškai  $c_i, i = 0, 1, \dots$ , žymėsime absoliučias konstantas. Aibės  $A$  elementų skaičių žymėsime  $|A|$ .

Sakysime, kad polinomas yra normuotas, jeigu jo vyriausias koeficientas lygus 1.  $F_q$  yra baigtinis skaičių kūnas, čia  $q = p^\alpha$ ,  $p$  yra pirminis,  $\alpha \in \mathcal{N}$ . Raide  $\mathcal{M}$  mes žymime normuotų polinomų, virš baigtinio skaičių kūno  $F_q$ , pusgrupę, kurioje apibrėžta polinomų daugybos operacija. Vienetinis šios pusgrupės elementas yra nulinio laipsnio polinomas  $f \equiv 1$ . Simboliškai  $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{M}$ ,  $n \in \mathcal{N}$  žymėsime normuotų neredukuojamų  $n$ -ojo laipsnio polinomų, aibę,  $P$  – normuoti neredukuojami polionomai.

Polinomo  $a \in \mathcal{M}$  laipsnį žymėsime simboliu  $\partial(a)$ .

Kiekvienas  $a \in \mathcal{M}$  vieninteliu būdu užrašomas taip:

$$a = \prod_p p^{\alpha(p)},$$

čia  $p$  yra neredukuojamas normuotas polinomas,  $\alpha(p)$  polinomo  $p$  kartotinumai  $a$  skaidinyje. Žinoma, kad kokie bebūtų  $a, b \in \mathcal{M}$ , yra teisingas sąryšis:

$$\partial(ab) = \partial(a) + \partial(b), \quad \forall a, b \in \mathcal{M}.$$

Be to

$$|\{a \in \mathcal{M}; \partial(a) = n\}| = q^n.$$

Normuotus pusgrupės  $\mathcal{M}$  polinomus žymėsime raidėmis  $a, b, e, d$ .

Sakysime, kad polinomas  $a$  lygsta polinomui  $e$  moduli  $b$  ( $a \equiv e \pmod{b}$ ), jeigu egzistuoja polinomas  $d$  toks, kad teisinga lygybė:  $a = e + db$ . Simboliškai  $\pi(m; b, a)$  žymėsime normuotų, neredukuojamų polinomų, kurių laipsnis  $\partial(p) = m \in \mathcal{N}$  ir kurie lygsta polinomui  $a$  moduli  $b$ , skaičių.

Pažymėkime:

$$\varphi(a) = \#\{b \in \mathcal{M}; \partial(a) = \partial(b), (a, b) = 1\}.$$

Yra žinoma, kad jeigu  $p \in \mathcal{P}$ , tai  $\varphi(p) = q^{\partial(p)} - 1$ . Be to, kiekvienam  $a \in \mathcal{M}$  teisinga lygybė:

$$\varphi(a) = q^{\partial(a)} \prod_{p|a} \left(1 - \frac{1}{q^{\partial(p)}}\right).$$

Aišku, kad  $\varphi(a)$ ,  $a \in \mathcal{M}$  yra multiplikatyvi funkcija.

Pažymėkime:

$$Q_m = \{p + 1; p \in \mathcal{P}_m\}.$$

M. Car [1] įrodė tokį teiginį:

**1 lema.** Tarkime, kad  $a, b \in \mathcal{M}$ ,  $(a, b) = 1$ . Tada

$$\left| \pi(m; b, a) - \frac{1}{\varphi(b)} \cdot \frac{q^m}{m} \right| \leq (1 + \partial(b)) q^{\frac{m}{2}}.$$

Be to

$$\frac{q^m}{m} - \frac{2q^{m/2}}{m} \leq |Q_m| \leq \frac{q^m}{m}, \quad (1)$$

kai  $m \in \mathcal{N}$ .

## Rezultatas

Bet kokiam  $a \in Q_m$  apibrėžkime

$$f(a) = \sum_{p|a} f(p), \quad A(l) = \sum_{\partial(p) \leq l} \frac{f(p)}{q^{\partial(p)} - 1}, \quad B^2(l) = \sum_{\partial(p) \leq l} \frac{f^2(p)}{q^{\partial(p)} - 1}.$$

Be to  $S(m) = q^m/m$ .

Teisinga tokia

**Teorema.** Tarkime, kad  $\alpha \in [0, 2)$ . Tada egzistuoja realus skaičius  $c = c(\alpha)$ , su kuriuo teisinga nelygybė:

$$\left( \frac{1}{S(m)} \sum_{a \in Q_m} |f(a) - A(m)|^\alpha \right)^{1/\alpha} \leq cB(m), \quad (2)$$

tolygiai visoms funkcijoms  $f : Q_m \rightarrow \mathbb{C}$ .

Įrodymas. Pažymėkime

$$g_1(a) = \sum_{\substack{p|a \\ \partial(p) \leq \varepsilon m}} f(p) \quad \text{ir} \quad g_2(a) = \sum_{\substack{p|a \\ \partial(p) > \varepsilon m}} f(p),$$

čia  $\varepsilon < 1/2$ . Iš pradžių tarkime, kad  $\forall a \in Q_m, f(a) \geq 0$ . Naudodami  $c_\alpha$  nelygybę, nagrinėjama (2) sumą įvertinkime taip:

$$\begin{aligned} \sum_{a \in Q_m} |f(a) - A(m)|^\alpha &\leq c(\alpha) \sum_{a \in Q_m} |g_1(a) - A(\varepsilon m)|^\alpha \\ &+ c(\alpha) \sum_{a \in Q_m} |g_2(a) - A(m) + A(\varepsilon m)|^\alpha =: c(\alpha)(S_1 + S_2), \end{aligned} \quad (3)$$

čia  $c(\alpha) = \max\{1, 2^{\alpha-1}\}$ .

Pastebėsime, kad funkcija  $h(\alpha) = \left(1/n \sum_{k=1}^n x_k^\alpha\right)^{1/\alpha}$  yra nemažėjanti,  $x_k \geq 0$ , todėl  $h(\alpha) \leq h(2)$ .

Įvertinkime (3) reiškinių pirmąją sumą, naudodami minėtąją  $h(\alpha)$  savybę. Turime

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \sum_{a \in Q_m} |g_1(a) - A(\varepsilon m)|^2 \\ &= \sum_{a \in Q_m} (g_1(a))^2 - 2 \sum_{a \in Q_m} g_1(a)A(\varepsilon m) + S(m)A^2(\varepsilon m). \end{aligned} \quad (4)$$

Įvertinsime (4) lygybės pirmąjį dėmenį. Remdamiesi 1 lema galime tvirtinti, kad

$$\begin{aligned} \sum_{a \in Q_m} g_1^2(a) &= \sum_{a \in Q_m} \left( \sum_{\substack{p|a \\ \partial(p) \leq \varepsilon m}} f(p) \right)^2 \leq \sum_{\partial(p) \leq \varepsilon m} f^2(p) \sum_{\substack{a \in Q_m \\ a \equiv 0 \pmod{p}}} 1 \\ &+ 2 \sum_{\substack{\partial(p) \leq \varepsilon m \\ \partial(r) \leq \varepsilon m \\ p \neq r}} f(p)f(r) \sum_{\substack{a \in Q_m \\ a \equiv 0 \pmod{pr}}} 1 \leq S(m) \{c_0 B^2(\varepsilon m) + A^2(\varepsilon m)\}, \quad r, p \in P. \end{aligned} \quad (5)$$

Nagrinėsime (4) reiškinių antrąjį dėmenį. Naudodamiesi 1 lema, Koši-Buniakovskio nelygybe, bei 3.1 lema (žr. [3]) gauname, kad

$$A(\varepsilon m) \sum_{a \in Q_m} g_1(a) \geq S(m)A^2(\varepsilon m) - S(m)B^2(\varepsilon m) \sqrt{m\varepsilon \ln(\varepsilon m)} q^{-m(1-\varepsilon)/2}.$$

Naudodami pastarąją bei (5) nelygybes, (4) reiškinį įvertiname taip:

$$S_1 \leq c_1 S(m) B^2(\varepsilon m). \quad (6)$$

Nagrinėsime (3) reiškinių antrąjį dėmenį  $S_2$ . Naudodamiesi  $c_\alpha$  nelygybe, bei sąryšiu (1) gauname tokį įvertį:

$$\begin{aligned} S_2 &\leq c(\alpha) \sum_{a \in Q_m} g_2^\alpha(a) + c(\alpha) \left( \sum_{\varepsilon m < \partial(p) \leq m} \frac{f(p)}{\varphi(p)} \right)^\alpha \sum_{a \in Q_m} 1 \\ &\leq c(\alpha) \left( \sum_{a \in Q_m} g_2^\alpha(a) + O\left(\frac{q^m}{m} B^\alpha(m)\right) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Įvertinsime paskutiniojo reiškinių sumą, esančią dešinėje pusėje. Iš pradžių parodysime, kad bet kokiam fiksuotam  $l \in \mathcal{N}$  ir fiksuotam skaičiui  $\varepsilon < 0.5$ , teisinga nelygybė:

$$S = \sum_{\varepsilon m < \partial(p) \leq m} q^{\partial(p)(l-1)} \pi^l(m; -1, p) < c_2 \left( \frac{q^m}{m} \right)^l. \quad (8)$$

Tarkime, kad  $k_i$ , bet kokie, nenulinio laipsnio polinamai. Pažymėkime

$$N(m; k_1, \dots, k_l) = \sum^* q^{\partial(p)(l-1)}, \quad (9)$$

čia simboliu  $\sum^*$  žymime sumą, kurioje sumuojama neredukuojamų polinomų  $p$ ,  $k_i p \in Q_m$  visiems  $i \in \{1, \dots, l\}$ , laipsniais  $\partial(p)$  tokiais, kad  $\varepsilon m < \partial(p) \leq m$ .

Naudodami (9) lygybę, (8) reiškinių kairiosios pusės sumą įvertiname taip:

$$S \leq \sum_{1 \leq \partial(k_1) < \dots < \partial(k_l) \leq (1-\varepsilon)m} N(m; k_1, \dots, k_l). \quad (10)$$

Simboliu  $\rho(d)$  pažymėkime liekanų klasių  $a \pmod d$ , kurios yra lyginio

$$t(a) := a \prod_{i=1}^l (k_i a - 1) \equiv 0 \pmod d,$$

sprendiniai, skaičių.

Pažymėkime

$$K = \prod_{i=1}^l k_i \prod_{1 \leq i < j \leq l} (k_j - k_i).$$

Atkreipsime dėmesį, kad jei  $p$  yra neredukuojamas polinomas, turintis savybes  $\partial(p) \geq l + 1 \wedge p \nmid K$ , tai  $\rho(p) = l + 1$ .

Parinkime  $r \in \mathcal{R}$  tokiu būdu:  $l + 1 < r < \varepsilon m / 2$ . Tegu

$$P_r = \prod_{\substack{l+1 < \partial(p) \leq r \\ p \nmid K}} p.$$

Kaip paprastai, tuščia sandauga lygi vienetui. Tarkime, kad  $a \in \mathcal{M}$ ,  $\partial(a) \leq m$ . Tada

$$N(m; k_1, \dots, k_l) \leq \sum_{\substack{\partial(a)=m-\partial(k_l) \\ (t(a), P_r)=1}} q^{\partial(a)(l-1)} = q^{(m-\partial(k_l))(l-1)} \sum_{\substack{\partial(a)=m-\partial(k_l) \\ (t(a), P_r)=1}} 1.$$

Pastebėsime, kad

$$A_d := \sum_{\substack{\partial(a)=m \\ t(a) \equiv 0 \pmod{d}}} 1 = q^{m-\partial(d)} \rho(d).$$

Pasinaudoję 5.4 lema (žr. [3]), kai  $Lr < \varepsilon m$ , gauname tokią nelybę:

$$N(m; k_1, \dots, k_l) \leq \left( \frac{q^m}{q^{\partial(k_l)} m} \right)^l \frac{c_3}{m} \exp \left\{ \sum_{\substack{p|K \\ l+1 < \partial(p) \leq r}} \frac{l+1}{q^{\partial(p)}} \right\}. \quad (11)$$

Pažymėję

$$T(k_l) = \sum_{\partial(k_1) < \dots < \partial(k_{l-1}) \leq \partial(k_l)} \exp \left\{ \sum_{p|K} \frac{l+1}{q^{\partial(p)}} \right\},$$

(11) nelybę perrašome tokiu būdu:

$$N(m; k_1, \dots, k_l) \leq c_4 \left( \frac{q^m}{q^{\partial(k_l)} m} \right)^l \frac{1}{m} \sum_{\partial(k) \leq \varepsilon m} \frac{T(k)}{q^{\partial(k)} m}. \quad (12)$$

Nagrinsime reiškini  $T(k_l)$ . Matome, kad

$$\begin{aligned} T(k_l) &\leq \sum_{\partial(k_1) < \dots < \partial(k_{l-1}) \leq \partial(k_l)} \exp \left\{ \sum_{p|(K/D(k_{l-1}))} \frac{l+1}{q^{\partial(p)}} \right\} \\ &\quad \times \sum_{\partial(k_{l-1}) \leq \partial(k_l)} \exp \left\{ \sum_{p|D(k_{l-1})} \frac{l+1}{q^{\partial(p)}} \right\} =: T_1 \cdot T_2, \end{aligned} \quad (13)$$

čia

$$D(k_{l-1}) = k_{l-1} \prod_{i=1}^{l-2} (k_{l-1} - k_i).$$

Visų pirma įvertinsime sumą  $T_2$ . Naudodamiesi akivaizdžia nelybe  $t_1 \dots t_{l-1} \leq t_1^{l-1} + \dots + t_{l-1}^{l-1}$ ,  $t_i \in \mathcal{R}^+$ ,  $i = 1 \dots, l-1$ , gauname, kad

$$T_2 = \sum_{i=0}^{l-2} \sum_{\partial(k_{l-1}) \leq \partial(k_l)} \exp \left\{ \sum_{\substack{p|k_{l-1} \vee \\ p|(k_{l-1}-k_i)}} \frac{l+1}{q^{\partial(p)}} \right\} \leq c_5 q^{\partial(k_l)}. \quad (14)$$

(13) reiškinio sumą  $T_1$  galime įvertinti tokiu būdu:

$$T_1 \leq c_6 q^{(l-1)\vartheta(k_l)} \sum_{d|k_l} \frac{(l+1)^{\omega(d)}}{q^{\vartheta(d)}}. \quad (15)$$

Remdamiesi (14) ir (15) įverčiais, bei (12) ir (13) nelygybėmis gauname, kad

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq \vartheta(k_1) < \dots < \vartheta(k_l) \leq \varepsilon m} N(m; k_1, \dots, k_l) \\ & \leq c_7 \left(\frac{q^m}{m}\right)^l \frac{1}{m} \sum_{\vartheta(d)=1}^{\infty} \frac{(l+1)^{\omega(d)}}{q^{\vartheta(d)}} \sum_{\vartheta(t) \leq \varepsilon m - \vartheta(d)} \frac{1}{q^{\vartheta(td)}} \leq c_8 \left(\frac{q^m}{m}\right)^l. \end{aligned}$$

Iš paskutiniosios nelygybės bei (9) lygybės išplaukia (8) nelygybė.

Nagrinsime (7) nelygybę. Tarkime, kad  $l \in \mathcal{N}$ . Pažymėkime  $\beta = 2(1 - 1/l)$ . Tada,  $l - 1 = \beta/(2 - \beta)$  ir  $l = 2/(2 - \beta)$ .

Turime, kad

$$\sum_{a \in Q_m} |g_2(a)|^\beta \leq c_9 \sum_{\varepsilon m < \vartheta(p) \leq m} f^\beta(p) \pi(m; -1, p) =: S_3.$$

Taikydami Holderio nelygybę su rodikliais  $\beta_1 = 2/\beta$  ir  $\beta_2 = 2/(2 - \beta)$  gauname tokį sumos  $S_3$  įvertį:

$$\begin{aligned} S_3 & \leq \left( \sum_{\varepsilon m < \vartheta(p) \leq m} \frac{f^2(p)}{q^{\vartheta(p)}} \right)^{\beta/2} \sum_{\varepsilon m < \vartheta(p) \leq m} \left( q^{\vartheta(p)\beta/(2-\beta)} \pi^{2/(2-\beta)}(m; -1, p) \right)^{(2-\beta)/2} \\ & \leq c_{10} B^\beta(m) S^\beta(m). \end{aligned}$$

Tarkime, kad  $0 < \alpha < 2$  bet koks pasirinktas skaičius. Tuomet egzistuoja skaičius  $l \in \mathcal{N}$  toks, kad  $\alpha \leq \beta$ . Bet tada

$$\left( \frac{1}{S(m)} \sum_{a \in Q_m} g_2^\alpha(a) \right)^{1/\alpha} \leq \left( \frac{1}{S(m)} \sum_{a \in Q_m} g_2^\beta(a) \right)^{1/\beta} \leq c_{11} B(m).$$

Naudodamiesi paskutiniu įverčiu, (7) ir (6) nelygybėmis, iš (3) gauname teoremos įrodymą, kai  $f(a) \geq 0$ .

Jeigu funkcija  $f \in \mathcal{R}$ , įgyja abiejų ženklų reikšmes, mes apibrėžiame funkciją  $f^\pm(p) = \max\{\pm f(p), 0\}$ . Tada

$$(f(a) - A(m))^2 \leq 2(f^+(a) - A^+(m))^2 + 2(f^-(a) - A^-(m))^2.$$

Jeigu funkcija  $f \in \mathcal{C}$ , tai atskyrę funkcijos realiąsias ir menamąsias dalis elgiamės aukščiau aprašytu būdu.

## Literatūra

- [1] M. Car, Le théorème de Chen pour  $F_q[X]$ , *Diss. Math.*, CCXXIII, 95 (1972).
- [2] S.D. Cohen, The function field abstract prime number theorem, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **106**, 7–12 (1989).
- [3] W.B. Zhang, Probabilistic number theory in additive arithmetic semigroups I, In: *Analytic Number Theory*, *Prog. Math.*, **138**, Birkhauser, pp. 839–885 (1996).

## The Kubilius inequality in the polynomial semigroup

G. Bareikis

Let  $\mathcal{P}$  be a set of primary irreducible polynomials and  $Q_m = \{p + 1; p \in \mathcal{P}, \partial(p) = m\}$ . Kubilius inequality for additive functions  $f : Q_m \rightarrow \mathcal{C}$  is proved.