Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 356–361
© 2001 Matematikos ir informatikos institutas

Lygtys ir nelygybės vidurinėje mokykloje

Petrė-Valda GREBENIČENKAITĖ (Šiaulių Salduvės vid. mokykla, ŠU)
el. paštas: mat.kat@cr.su.lt

Mokykloje sprendžiamos įvairios lygtys ir nelygybės. Mokiniai daro klaidas spręsdami logaritmines ir rodiklines lygtis, kai po pertvarkymų gauna algebrinę lygtį, nes nemoka jų tapačiai pertvarkyti.

Lygtims spręsti dažnai taikomos funkcijų monotoniškumo savybės. Pavyzdžiui: *Raskite teigiamą lygties* $2^x = -x^2 + 3$ *šaknį.* Šios lygties vieną šaknį $x = 1$ lengva atspėti. Kadangi funkcija $y = 2^x$ didėja, o funkcija $y = -x^2 + 3$ mažėja intervale $[0; +\infty)$, todėl šaknis $x = 1$ yra vienintelė.

Panašiai sprendžiama ir nelygybė

$$\log_4(\sqrt{x} + 1)\lg(x + 1) \geqslant 1.$$

Duotosios nelygybės apibrėžimo sritis – neneigiamų skaičių aibė. Akivaizdu, kad šiame intervale sandauga $\log_4(\sqrt{x} + 1) \cdot \lg(x + 1)$ įgyja reikšmę 1, kai $x = 9$. Iš tikrųjų, $\log_4(\sqrt{9}+1)\cdot\lg(9+1) = \log_4 4 \lg 10 = 1$. Funkcijos $y = \log_4(\sqrt{x}+1)$ ir $y = lg(x+1)$ yra monotoniškai didėjančios, todėl, kai $x > 9$, jos įgys reikšmes, didesnes už 1, vadinasi, ir jų sandauga bus didesnė už 1. Vadinasi, duotosios nelygybės sprendiniai yra intervale $[9; +\infty)$.

Monotoniškai mažėjančios funkcijos savybės taikomos sprendžiant nelygybę

$$\log_5(1 + \sqrt{x}) > \log_{16} x.$$

Duotosios nelygybės apibrėžimo sritis $(0; +\infty)$. Pažymėkime $\log_{16} x = y$, tada $x = 16^y$ ir duotoji nelygybė įgauna pavidalą $\log_5(1 + 4^y) > y$. Iš čia

$$1 + 4^y > 5^y \quad \text{arba} \quad \left(\frac{1}{5}\right)^y + \left(\frac{4}{5}\right)^y > 1.$$

Kadangi funkcija $f(y) = \left(\frac{1}{5}\right)^y + \left(\frac{4}{5}\right)^y > 1$ yra mažėjanti (kaip dviejų mažėjančių funkcijų suma), lygybė $f(y) = 1$ teisinga su vienintele reikšme $y = 1$. Nelygybė $\left(\frac{1}{5}\right)^y + \left(\frac{4}{5}\right)^y > 1$ teisinga su reikšme $y < 1$. Todėl $\log_{16} x < 1$. Iš čia $0 < x < 16$.

Reikia atkreipti dėmesį, kad lygtis $f(x) = a$ turi šaknų tik tada, kai a priklauso funkcijos $f(x)$ reikšmių sričiai. Jei $f(x)$ yra monotoninė funkcija, tai lygtis $f(x) = a$ turi vienintelę šaknį tada ir tik tada, kai a priklauso funkcijos $f(x)$ reikšmių sričiai. Jei funkcija $f(x)$ didėjanti (mažėjanti), $f(x)$ apibrėžimo srities funkcijos $f(x)$ reikšmė didesnė už a, tai lygtis sprendinių neturi.

Panagrinėkime iracionaliųjų lygčių sprendimo pavyzdžius.

1) Parodykite, kad lygtis $\sqrt{4x+1}+\sqrt{x-2}=1$ neturi sprendinių.

Kairiojoje lygties pusėje esanti funkcija yra didėjanti kaip dviejų didėjančių funkcijų suma. Mažiausią reikšmę 3 ji įgyja, kai $x = 2$ (apibrėžimo sritis $[2;+\infty)$). Vadinasi, kairiosios lygties pusės reikšmė visada didesnė už 1, todėl lygtis sprendinių neturi.

2) Kiek sprendinių turi lygtis $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{3x+1}=9$?

Kairiosios lygties pusės funkcijos apibrėžimo sritis $[1;+\infty)$. Ši funkcija yra didėjanti ir mažiausią reikšmę $2+\sqrt{5}$ ji įgyja, kai $x = 1$. Kadangi $2+\sqrt{5} < 9 < f(100)$, tai skaičius 9 patenka į funkcijos reikšmių sritį ir aišku duotoji lygtis turi vieną sprendinį.

3) Išspręskite lygtį $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$.

Matome, kad $x = 3$ yra lygties šaknis. Kairiosios lygties pusės funkcija yra didėjanti (kaip suma dviejų didėjančių su reikšme $x \geqslant -1$ funkcijų). Todėl lygtis turi vienintelę šaknį $x = 3$.

4) Išspręskite lygtį $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}=0,2$. Kintamojo x leistinų reikšmių sritis $[0;+\infty)$. Funkcija $y=\sqrt{x}$ didėjanti, tai $\sqrt{x+1}>\sqrt{x}$. Kairioji duotosios lygties pusė neigiama, o dešinioji – teigiama, todėl sprendinių nėra.

Vienintelį sprendinį turi ir lygtis $x^{2002}+2001x=2002$, kurios kairioji pusė yra didėjanti funkcija kaip suma dviejų didėjančių funkcijų $y=x^{2002}$ ir $y=2001x$, o dešinioji – konstanta. Todėl lygties sprendinys yra $x = 1$.

Lygtims spręsti taikomos ir funkcijos aprėžtumo savybės, t.y., jei funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ tokios, kad visiems x galioja nelygybės $f(x) \leqslant a$ ir $g(x) \leqslant b$, ir duota lygtis $f(x)+g(x)=a+b$, tai ji ekviavalenti sistemai $\begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=b. \end{cases}$

Šios savybės taikomos spręsti lygtį

$$\cos^{2000}x+\sin^{2001}x=1.$$

Kadangi $|\cos x| \leqslant 1$ ir $|\sin x| \leqslant 1$, tai

$$\cos^{2000}x<\cos^2 x, \quad \sin^{2001}x \leqslant \sin^2 x.$$

Tada

$$\cos^{2000}x+\sin^{2001}x \leqslant \cos^2 x+\sin^2 x, \quad \text{t.y.,} \quad \cos^{2000}x+\sin^{2001}x \leqslant 1.$$

Lygybė galima tik tuo atveju, kai

$$\begin{cases} \cos^{2000}x=\cos^2 x, \\ \sin^{2001}x=\sin^2 x. \end{cases}$$

Gautoji sistema ekvivalenti sistemų visumai:

$$\begin{cases} \sin x=0, \\ \cos x=1; \end{cases} \quad \text{arba} \begin{cases} \sin x=0, \\ \cos x=-1; \end{cases} \quad \text{arba} \begin{cases} \sin x=1, \\ \cos x=0. \end{cases}$$

$$x = 2\pi k, \quad k \in Z, \qquad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z, \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in Z.$$

Ats.: $x = \pi n, n \in Z, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z.$

Sprendžiant lygtis taikomas ir reikšmių aibių palyginimas.

Jei visiems $x \in X$ teisingos nelygybės $f(x) \geqslant a$ ir $g(x) \leqslant a$, tai lygtis $f(x) = g(x)$ aibėje X ekvivalenti lygčių sistemai

$$\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}$$

Pavyzdžiui,

$$\begin{aligned} &x^8 - 7x^4 - 4x^2 + 20 = 0, \\ &x^8 - 8x^4 + 16 = -x^4 + 4x^2 - 4, \\ &(x^4 - 4)^2 = -(x^2 - 2)^2. \end{aligned}$$

Kadangi $(x^4 - 4)^2 \geqslant 0, \quad -(x^2 - 2)^2 \leqslant 0$, tai

$$\begin{cases} (x^4 - 4)^2 = 0, \\ (x^2 - 2)^2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 2, \\ x = \pm\sqrt{2}; \end{cases} \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

Ats.: $\pm\sqrt{2}$.

Reikia atkreipti dėmesį į tai, kad jei

$$\begin{cases} f(x) > a, \\ g(x) \leqslant a; \end{cases} \quad \text{arba} \quad \begin{cases} f(x) < a, \\ g(x) \geqslant a; \end{cases}$$

tai lygtis $f(x) = g(x)$ neturi sprendinių.

Nelygybėms spręsti taikomas intervalų metodas.

Pavyzdžiai:

1) Išspręskite nelygybę:

$$\frac{(x-2)|x-1|(e^x - 4)}{x^2(x-1)(\sin x + 2)^{\frac{1}{x^2+3x+2}}} \geqslant 0.$$

Pirmiausia pažymime

$$g(x) = \frac{(x-2)|x-1|(e^x - 4)}{x^2(x-1)(\sin x + 2)^{\frac{1}{x^2+3x+2}}}.$$

$g(x) = 0$, kai $x = 2$; $\quad e^x - 4 = 0$, t.y., $e^x = 4$ arba $x = \ln 4$.

$g(x)$ neegzistuoja, kai $x = 0; x = 1; x = -2; x = -1$.

Vadinasi, $D(g)$ suskaidoma į 7 intervalus: $(-\infty; -2)$; $(-2; -1)$; $(-1; 0)$; $(0; 1)$; $(1; \ln 4)$; $(\ln 4; 2)$; $(2; +\infty)$ ir du taškus $\ln 4; 2$. $g(x) \geqslant 0$ intervaluose $(1; \ln 4)$ ir $[2; +\infty)$.

2) Išspręskite nelygybę

$$\frac{x-2}{x-1} > \sqrt{x^2+x-12}(3x-x^2-2).$$

Pirmiausia pertvarkome duotąją nelygybę:

$$\frac{x-2}{x-1} + \sqrt{(x+4)(x-3)}(x-2)(x-1) > 0;$$

$$\frac{(x-2)(1+\sqrt{(x+4)(x-3)}(x-1)^2)}{x-1} > 0.$$

Pažymime

$$g(x) = \frac{(x-2)(1+\sqrt{(x+4)(x-3)}(x-1)^2)}{x-1}.$$

Nelygybės apibrėžimo sritis: $(-\infty; -4]\bigcup[3; +\infty)$. Lygties

$$\frac{(x-2)(1+\sqrt{(x+4)(x-3)}(x-1)^2)}{x-1} = 0$$

šaknis $x = 2$. Taškų $x = 1, x = 2$ nepažymime skaičių tiesėje, nes nepatenka į nelygybės apibrėžimo sritį. Todėl skaičių tiesė padalijama į du intervalus $(-\infty; -4]$ ir $[3; +\infty)$, kuriuose $g(x) > 0$.

Ats.: $(-\infty; -4]\bigcup[3; +\infty)$.

Lygtims spręsti taikomos ir proporcijų savybės. Pavyzdžiui,

1) Išspręskite lygtį

$$\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \frac{4x}{x^2-12x+15}.$$

Taikome proporcijos savybę.

Jei $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\quad c \neq 0; \quad d \neq 0$, tai

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}.$$

Tada

$$\frac{x^2-10x+15-x^2+6x-15}{x^2-10x+15+x^2-6x+15} = \frac{4x-x^2+12x-15}{4x+x^2-12x+15},$$

$$\frac{-4x}{2x^2-16x+30} = \frac{-x^2+16x-15}{x^2-8x+15},$$

$$\frac{2x}{x^2-8x+15}=\frac{x^2-16x+15}{x^2-8x+15}.$$

Gautojoje lygtyje $x^2-8x+15\neq 0$, t,y, $x\neq 3$; $x\neq 5$. Bet $x=3$ ir $x=5$ yra duotosios lygties sprendiniai.

Sprendžiame lygtį $2x=x^2-16x+15$, t.y., $x^2-18x+15=0$, $x=9\pm\sqrt{66}$. Vadinasi, $x=3;5;9-\sqrt{66};9+\sqrt{66}$.

Duotąją lygtį galima buvo spręsti padalijant kiekvienos jos pusės skaitiklį ir vardiklį iš x ir padaryti keitinį $t=x+\frac{15}{x}$.

Išspręskite lygtį

$$\frac{2\sqrt{3}\cos 10^0+1}{2\sin 10^0+1}=\frac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}x}.$$

Taikome proporcijos savybę

$$\frac{2\sqrt{3}\cos 10^0+1+2\sin 10^0+1}{2\sqrt{3}\cos 10^0+1-2\sin 10^0-1}=\frac{\mathrm{tg}3x+\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}3x-\mathrm{tg}x},$$

$$\frac{2\sqrt{3}\cos 10^0+2\sin 10^0+2}{2\sqrt{3}\cos 10^0-2\sin 10^0}=\frac{\sin 3x\cos x+\cos 3x\sin x}{\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x},$$

$$\frac{2\left(\sqrt{3}\cos 10^0+\sin 10^0+1\right)}{2\left(\sqrt{3}\cos 10^0-\sin 10^0\right)}=\frac{\sin 4x}{\sin 2x},$$

$$\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^0+\frac{1}{2}\sin 10^0\right)+1}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^0-\frac{1}{2}\sin 10^0\right)}=2\cos 2x,$$

$$\frac{2\left(\cos 30^0\cos 10^0+\sin 30^0\sin 10^0\right)+1}{2\left(\cos 30^0\cos 10^0-\sin 30^0\sin 10^0\right)}=2\cos 2x,$$

$$\frac{2\cos 20^0+1}{2\cos 40^0}=2\cos 2x,\qquad \frac{2\left(\cos 20^0+\frac{1}{2}\right)}{2\cos 40^0}=2\cos 2x,$$

$$\frac{\cos 20^0+\cos 60^0}{\cos 40^0}=2\cos 2x,\qquad \frac{2\cos 40^0\cos 20^0}{\cos 40^0}=2\cos 2x,$$

$$\cos 2x=\cos 20^0,\quad 2x=\pm 20^0+360^0 n,\quad n\in Z,\quad x=\pm 10^0+180^0 n, n\in Z.$$

Ats.: $x=\pm 10^0+180^0 n,\ n\in Z$.

Sprendžiant lygtis ir nelygybės dažnai reikia parinkti racionalius sprendimo metodus, sumaniai atlikti analizę. Pavyzdžiui, Išspręskite nelygybę

$$(x^2+2x)(\mathrm{tg}^2 x+3^{x-1})\leqslant 0.$$

Kadangi $\mathrm{tg}^2 x + 3^{x-1} > 0$ su visomis x reikšmėmis, išsskyrus $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. Vadinasi, duotoji nelygybė ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x^2 + 2x \leqslant 0, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z. \end{cases}$$

Nelygybės $x^2 + 2x \leqslant 0$ sprendiniai yra intervalas $[-2; 0]$. Iš šio intervalo reikia eliminuoti skaičiaus $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. Tokiu skaičiumi yra $-\frac{\pi}{2}$. Vadinasi, $x \in [-2; -\frac{\pi}{2}) \bigcup (-\frac{\pi}{2}; 0]$.

Mokyklos algebros kurse nėra bendro metodo, kaip spręsti lygtis ir nelygybes. Bandymas šiame straipsnyje apžvelgti kai kuriuos lygčių ir nelygybių sprendimo metodus, mano manymu, naudingas mokiniams, pasirinkusiems tikslinį kursą ir ruošiantis valstybiniams egzaminams.

Literatūra

[1] Анализ в помощь алгебре, М., *Квант*, **10** (1977).

[2] A. Andzans, I. Markusa, *Vai vari atrisinat?* Algebra, apgčids "Zvaigzm ABC" (1996).

[3] Саакян С.М. и др. *Задачи по алгебре и началам анализа для 10-11 классов*, М. (1990).

Equations and inequalities for secondary school students

P.-V. Grebeničenkaitė

In this article different solution methods of equations and inequalities are reviewed. It's necessary and useful for advanced level students preparing for the final examinations and various Olympiads and tournaments.