Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 244–248

Judesiai erdvėje L_2

Algimantas Pranas URBONAS (VPU)
el. paštas: urbonas@vpu.lt

Darbe [2] buvo surasta pirmoji lakuna tiesinių elementų tiesinės sieties erdvių L_n judesių grupių eilėse, kai $n > 4$. Liko neištirtos mažo matavimo erdvės, t.y. erdvės L_4, L_3, L_2, L_1.

Šiame straipsnyje ieškoma pirmoji lakuna judesių grupių eilėse erdvėje L_2.

Tegul L_2 – dvimatė tiesinių elementų erdvė (x^i, l^k) su tiesine sietimi $\Gamma^i_j(x, l)$ $(i, j, k = 1, 2)$ [1].

Objektas Γ^i_j yra homogeninis pirmos eilės kintamųjų l^i atžvilgiu ir pakeitus bazės koordinates

$$\bar{x}^i = f^i(x^k)\ (x^k = g^k(\bar{x}^i)), \tag{1}$$

keičiasi taip

$$\bar{\Gamma}^i_j(\bar{x}, \bar{l}) = f^i_k g^l_j \Gamma^k_l(x, l) - f^i_{ks} g^k_j l^s. \tag{2}$$

Čia ir toliau mes žymėsime

$$f^i_k = \frac{\partial f^i}{\partial x^k}, \quad f^i_{kl} = \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^l}, \dots$$
$$g^i_k = \frac{\partial g^i}{\partial \bar{x}^k}, \quad g^i_{kl} = \frac{\partial^2 g^i}{\partial \bar{x}^k \partial \bar{x}^l}, \dots$$

Kaip buvo įrodyta [1] objektas Γ^i_j erdvėje L_2 indukuoja afininę sietį

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial \Gamma^i_j}{\partial l^k}. \tag{3}$$

Toliau diferencijavimą pagal l^k mes žymėsime tašku. Pavyzdžiui, $\frac{\partial A}{\partial l^k} = A._k$.

Priminsime, kad erdvės L_2 tiesinės sieties kreivumo tenzorius yra [1]

$$R^i_{jk} = 2(\partial_{[j}\Gamma^i_{k]} + \Gamma^i_{[j|p|}\Gamma^p_{k]}). \tag{4}$$

Bazės transformacija $\bar{x}^i = x^i + v^i(x)\delta t$ yra vadinama judesiu erdvėje L_2 su tiesine sietimi, jei $v^i(x)$ tenkina diferencialinių lygčių sistemą [1]

$$\underset{v}{\mathcal{L}}\Gamma^i_j = 0, \tag{5}$$

kur $\underset{v}{\mathcal{L}}$ – Lie išvestinė pagal $v^i(x)$.

Pažymėję $v^i_j = \nabla_j v^i$ (∇_j žymi kovariantinę išvestinę pagal x^j) ir laikydami v^i bei v^i_j nežinomomis funkcijomis šios bei (5) lygčių sistemų integruojamumo sąlygas užrašysime [1]:

$$\begin{cases} \underset{v}{\mathcal{L}}\ \Omega^i_{jk} = 0 \quad (\Omega^i_{jk} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{j\cdot k} - \Gamma^i_{k\cdot j}), \\ \underset{v}{\mathcal{L}}\ \Gamma^i_{j\cdot k\cdot l} = 0, \\ \underset{v}{\mathcal{L}}\ R^i_{jk} = 0 \quad (i,j,k = 1,2) \end{cases} \tag{6}$$

ir visos kitos lygtys, gautos pastarąsias kovariantiškai diferencijuojant po Lie išvestinės ženklu pagal x^l ir l^k iki N-tos eilės. Jei integruojamumo sąlygose yra ρ nepriklausomų lygčių ir $N+1$ serija nepriklausomų lygčių skaičiaus ρ nepadidina, tai erdvė L_2 turi judesių grupę G_r, kur $r = 6 - \rho$.

Kaip įrodyta [2] erdvė L_2 su tiesine sietimi Γ^i_j turi maksimalią šešių parametrų grupę tada ir tik tada, jei

$$\Gamma^i_j(x,l) = \Lambda^i_{jk}(x) l^k, \tag{7}$$

kur funkcijos $\Lambda^i_{jk}(x)$ tenkina sąlygas:

$$\partial_{[j}\Lambda^i_{k]l} + \Lambda^i_{[j|p|}\Lambda^p_{k]l} = 0, \tag{8}$$

$$\Lambda^i_{jk} = \Lambda^i_{kj}. \tag{9}$$

Ten pat [2] duotas pavyzdys, įrodantis, kad ši erdvių klasė nėra tuščia.

1 teorema. *Erdvė L_2 negali turėti* 5 *parametrų judesių grupės.*

Įrodymas. Šiuo atveju (6) sistema turi turėti vieną nepriklausomą lygtį ($\rho = 1$).

Tirsime (6) lygčių sistemos serijas:

$$\underset{v}{\mathcal{L}}\,\Omega^i_{jk} = 0,$$

$$\underset{v}{\mathcal{L}}\,\Gamma^i_{j\cdot k\cdot l} = 0,$$

$$\underset{v}{\mathcal{L}}\,R^i_{jk\cdot l} = 0.$$

Parašysime jas tokiu pavidalu:

$$v^s A_s\begin{pmatrix} i \\ j\ k \end{pmatrix} + v^p_s A^s_p\begin{pmatrix} i \\ j\ k \end{pmatrix} = 0, \tag{10}$$

$$v^s T_s\begin{pmatrix} i \\ j\ k\ l \end{pmatrix} + v^p_s T^s_p\begin{pmatrix} i \\ j\ k\ l \end{pmatrix} = 0, \tag{11}$$

$$v^s R_s\begin{pmatrix} i \\ j\ k\ l \end{pmatrix} + v^p_s R^s_p\begin{pmatrix} i \\ j\ k\ l \end{pmatrix} = 0, \tag{12}$$

kur

$$A_s\begin{pmatrix} i \\ j\ k \end{pmatrix} = \nabla_s \Omega^i_{jk} + 2\Omega^i_{pk}\Omega^p_{sj} + 2\Omega^i_{pj}\Omega^p_{ks} + 2\Omega^p_{jk}\Omega^i_{ps} + 2\Omega^i_{jk\cdot l}\Omega^l_{sp}l^p, \quad (10a)$$

$$A^s_p\begin{pmatrix} i \\ j\ k \end{pmatrix} = -\delta^i_p\Omega^s_{jk} + \delta^s_j\Omega^i_{pk} + \delta^s_k\Omega^i_{jp} + \Omega^i_{jk\cdot p}, \quad (10b)$$

$$T_s\begin{pmatrix} i \\ j\ k\ l \end{pmatrix} = \nabla_s\Gamma^i_{jk\cdot l} + 2\Omega^i_{ps}\Gamma^p_{jk\cdot l} - 2\Omega^p_{js}\Gamma^i_{pk\cdot l} - 2\Omega^p_{ks}\Gamma^i_{jp\cdot l}$$
$$- 2\Omega^p_{ls}\Gamma^i_{jk\cdot p} + 2\Gamma^i_{jk\cdot l\cdot r}\Omega^r_{sp}l^p, \quad (11a)$$

$$T^s_p\begin{pmatrix} i \\ j\ k\ l \end{pmatrix} = -\delta^i_p\Gamma^i_{jk\cdot l} + \delta^s_j\Gamma^i_{pk\cdot l} + \delta^s_k\Gamma^i_{jp\cdot l} + \delta^s_l\Gamma^i_{jk\cdot p} + \Gamma^i_{jk\cdot l\cdot p}l^s, \quad (11b)$$

$$R_s\begin{pmatrix} i \\ j\ k\ l \end{pmatrix} = \delta_s R^i_{jk\cdot l} + 2\Omega^i_{ps}R^i_{jk\cdot p} - 2\Omega^p_{js}R^i_{pk\cdot l} - 2\Omega^p_{ks}R^i_{jp\cdot l}$$
$$- 2\Omega^p_{ls}R^i_{jk\cdot p} + 2R^i_{jk\cdot l\cdot r}\Omega sp^r l^p, \quad (12a)$$

$$R^s_p\begin{pmatrix} i \\ j\ k\ l \end{pmatrix} = -\delta^i_p R^s_{jk\cdot l} + \delta^s_j R^i_{pk\cdot l} + \delta^s_k R^i_{jp\cdot l} + \delta^s_l R^i_{jk\cdot p} + R^i_{jk\cdot l\cdot p}l^s, \quad (12b)$$

$(i, j, k, \ldots = 1, 2)$.

Tyrimus atliksime specialioje koordinačių sistemoje. Ją parinksime tokią, kad nagrinėjamame erdvės L_2 taške turėtume

$$\begin{cases} l^1 = 1\,, \\ l^2 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Pradėsime nuo (10) sistemos tyrimo. Galimi tokie atvejai:

1) $\Omega^2_{12} \neq 0$,

2) $\Omega^1_{12} \neq 0 \quad (\Omega^2_{12}) = 0$.

Pirmuoju atveju matricos (10b) minoras lygtyse $\begin{pmatrix} 1 \\ 1\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1\ 2 \end{pmatrix}$ prie funkcijų v^1_1, v^1_2 yra nelygus nuliui ir $\rho \geqslant 2$, o tai prieštarauja sąlygai, kad $\rho = 1$. Todėl $\Omega^2_{12} = 0$.

Antruoju atveju minoras lygtyse $\begin{pmatrix} 1 \\ 1\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1\ 2 \end{pmatrix}$ prie funkcijų v^2_1, v^2_2 yra lygus $\Omega^1_{12}(\Omega^1_{12} + \Omega^2_{12\cdot 2})$, todėl $\Omega^2_{12\cdot 2} = -\Omega^1_{12} \neq 0$. Tada imdami lygtis $\begin{pmatrix} 1 \\ 1\ 2 \end{pmatrix}$ ir $\begin{pmatrix} 1 \\ 1\ 2\ 2 \end{pmatrix}$ (iš $\mathop{\mathcal{L}}_{v}\Omega^i_{jk\cdot l} = 0$) prie funkcijų v^1_2, v^2_2 gaumane, kad $\Omega^2_{12\cdot 2} = 0$, o tai reiškia, kad ir $\Omega^1_{12} = 0$.

Taigi, $\Omega^i_{jk} = 0$ ir objektas $\Gamma^i_{j\cdot k}$ yra simetrinis apatinių indeksų atžvilgiu. Dėl to tašką žymintį diferencijavimą prie funkcijų Γ^i_j galima praleisti.

Pereiname prie sekančios (11) integruojamumo sąlygų serijos. Pastebėsime, kad dėl (13) ir Γ^i_j homogeniškumo $\Gamma^i_{jk1} = \Gamma^i_{j1k} = \Gamma^i_{1jk} = 0$.

Galimi tokie atvejai:

1) $\Gamma^2_{222} \neq 0$,

2) $\Gamma^1_{222} \neq 0 \quad (\Gamma^2_{222} = 0)$.

Pirmuoju atveju, matricos (11b) minoras lygtyse $\left({}^{\ 1}_{2\,2\,2}\right)$ $\left({}^{\ 2}_{2\,2\,2}\right)$ prie funkcijų v^1_1, v^1_2 yra lygus $-2(\Gamma^2_{222})^2$. Todėl $\rho \geqslant 2$ ir $\Gamma^2_{222} = 0$.

Antruoju atveju, tam, kad minoras lygtyse $\left({}^{\ 1}_{2\,2\,2}\right)$ $\left({}^{\ 2}_{2\,2\,2}\right)$ prie funkcijų v^2_1, v^2_2 ir minoras lygtyse $\left({}^{\ 1}_{2\,2\,2\,2}\right)$ $\left({}^{\ 2}_{2\,2\,2\,2}\right)$ prie funkcijų v^1_1, v^1_2 būtų lygūs nuliui būtina, kad $\Gamma^1_{222} = 0$.

Taigi, visos komponentės $\Gamma^i_{jkl} = 0$.

Integruodami šią lygtį gausime

$$\Gamma^i_j = \Lambda^i_{jk}(x) l^k, \tag{14}$$

$$\Lambda^i_{jk} = \Lambda^i_{kj}. \tag{15}$$

Tada $R^i_{jk\cdot l} = \partial_{[j}\Lambda^i_{k]l} + \Lambda^i_{[j|p|}\Lambda^p_{k]l} = R^i_{ljk}$. Kadangi R^i_{ljk} formaliai yra afininės sieties $\Gamma^i_{jk} = \Lambda^i_{jk}(x)$ kreivumo tenzorius, tai yra įrodyta, kad jei $R^i_{ljk} \neq 0$, tai lygtys $\underset{v}{\mathcal{L}} R^i_{ljk} = 0$ turi ne mažiau 2 nepriklausomas lygtis, todėl mūsų nagrinėjamu atveju $R^i_{ljk} = R^i_{jk\cdot l} = 0$.

Iš lygybės $R^i_{jk\cdot l} l^l = R^i_{jk}$ išplaukia, kad

$$R^i_{jk} = 0. \tag{16}$$

Jei tiesinė sietis tenkina (14), (15) bei (16) sąlygas, tai, kaip įrodyta [2] erdvė L_2 turi 6 parametrų judesių grupę.

Teorema įrodyta.

Pažymėsime, kad erdvės L_2, turinčios 4 parametrų judesių grupę egzistuoja. Pateikiame tokios erdvės pavyzdį.

Pavyzdys. Erdvė L_2 su tiesine sietimi $\Gamma^1_1 = \Gamma^2_2 = l^1$, $\Gamma^1_2 = \Gamma^2_1 = 0$ turi 4 parametrų judesių grupę.

Be to šios erdvės kreivumo tenzorius nelygus nuliui, todėl teisinga teorema.

2 teorema. *Nenulinio kreivumo tiesinės sieties erdvių L_2 maksimali judesių grupė yra keturių parametrų.*

Literatūra

[1] A.P. Urbonas, Les mouvements dans l'espace des éléments linéaires à connexion linéaire, *LMD XXXVIII konf. darbai*, Technika, 110–115 (1997).

[2] A.P. Urbonas, Sur la mobilité maximale des espaces L_n à connexion linéaire, *Liet. matem. rink.*, **38**(2), 265–275 (1998).

Les mouvements dans l'espace L_2

A.P. Urbonas

On a démontré

Théorème 1. Il n'existe les espaces L_2 à connexion linéaire ayant le groupe des mouvements de 5 paramètres.

Théorème 2. L'espace L_2 à connexion linéaire de la curvature non nulle admet le groupe de 4 paramètres maximum.