Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 239–243

Apie Kavagučio erdvių geometriją

Edmundas MAZĖTIS (VPU)
el. paštas: edmundas@vpu.lt

Sakykime, kad T^3V_n – trečiosios eilės liestinė sluoksniuotė, kurios bazė V_n yra n-matė glodi daugdara (žr. [2]), (x^i, y^i, z^i, u^i) – jos lokaliosios koordinatės, kurių keitimosi dėsniai yra tokie:

$$\begin{aligned} \overline{x}^i &= f^i(x^k), \quad \overline{y}^i = f^i_k y^k, \\ \overline{z}^i &= f^i_k z^k + \frac{1}{2} f^i_{kh} y^k y^h, \\ \overline{u}^i &= f^i_k u^k + f^i_{kh} y^k z^k + \frac{1}{6} f^i_{khp} y^k y^h y^p, \end{aligned} \tag{1}$$

čia $f^i_k = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k}$, $f^i_{kh} = \frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^k \partial x^h}, \ldots, g^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^k}$, $g^i_{kh} = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^k \partial \overline{x}^h}, \ldots$ ir $f^i_k g^k_j = \delta^i_j$. Lokaliosios koordinatės (x^i, y^i, z^i, u^i) yra Pfaffo sistemos $\omega^i = 0$, $\theta^i = 0$, $(\overset{1}{\vartheta})^i = 0$, $(\overset{2}{\vartheta})^i = 0$, sprendiniai, be to tiesiškai nepriklausomos diferencialinės formos ω^i, θ^i, $(\overset{1}{\vartheta})^i$, ir $(\overset{2}{\vartheta})^i$ tenkina tokias erdvės T^3V_n struktūrines lygtis

$$\begin{aligned} D\omega^i &= \omega^k \wedge \omega^i_k, \quad D\theta^i = \theta^k \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \theta^i_k, \\ D(\overset{1}{\vartheta})^i &= (\overset{1}{\vartheta})^k \wedge \omega^i_k + \theta^k \wedge \theta^1_k + \omega^k \wedge (\overset{1}{\vartheta})^i_k, \\ D(\overset{2}{\vartheta})^i &= (\overset{2}{\vartheta})^k \wedge \omega^i_k + (\overset{1}{\vartheta})^k \wedge \theta^i_k + \theta^k \wedge (\overset{1}{\vartheta})^i_k + \omega^k \wedge (\overset{2}{\vartheta})^i_k. \end{aligned} \tag{2}$$

Apibrėžimas. Glodi n-matė daugdara V_n yra vadinama Kavagučio erdve, jei jos antrosios eilės liestinėje sluoksniuotėje T^2V_n yra apibrėžta realioji funkcija $F(x^i, y^i, z^i)$, kurios pagalba bet kokios erdvės V_n glodžios parametrizuotos kreivės γ: $x^i = x^i(t)$ lanko ilgis s apskaičiuojamas pagal formulę:

$$s = \int\limits_{t=t_1}^{t=t_2} F\big(x^i(t), y^i(t), z^i(t)\big)\, \mathrm{d}t. \tag{3}$$

Kad taip apibrėžtas kreivės lanko ilgis s nepriklausytų nuo kreivės parametrizacijos, funkcija F turi tenkinti tokias sąlygas (žr. [1]):

1. Funkcija F yra diferencijuojama pagal visus $3n$ argumentų bent iki penktos eilės.
2. Funkcija F įgyja teigiamas reikšmes, jei bent vienas iš kintamųjų y^i ir z^i nelygus nuliui.

3. Kvadratinė forma $\frac{\partial^2 F}{\partial z^i \partial z^j} v^i v^j$ yra teigiamai apibrėžta visiems vektoriams $v = \{v^1, v^2, \dots, v^n\}$, liečiantiems daugdarą V_n.

4. Funkcija F tenkina homogeniškumo sąlygą: jei $\overline{y}^i = ky^i$, $k > 0$, tai

$$F(x^i, \overline{y}^i, \overline{z}^i) = kF(x^i, y^i, z^i). \tag{4}$$

Pažymėję $\partial_i F = \frac{\partial F}{\partial x^i}$, $\partial'_i F = \frac{\partial F}{\partial y^i}$, $\partial''_i F = \frac{\partial F}{\partial z^i}$, funkcijos F diferencialą formomis $\omega^i, \theta^i, (\overset{1}{\vartheta})^i$ išreiškiame taip

$$\mathrm{d}F = \partial_i F \omega^i + \partial'_i F \theta^i + \partial''_i F (\overset{1}{\vartheta})^i. \tag{5}$$

Jei $\overline{y}^i = ky^i$, tai $\overline{z}^i = \frac{1}{2} k'_t y^i + kz^i$ (žr. [2]), ir iš (4) lygybės išplaukia tokios funkcijos F homogeniškumo sąlygos

$$y^i \partial''_i F = 0, \quad y^i \partial'_i F + z^i \partial''_i F = F. \tag{6}$$

Diferencijuodami šias lygybes, gauname

$$y^i \partial_k \partial''_i F = 0, \quad y^i \partial''_k \partial''_i F = 0, \quad y^i \partial'_k \partial''_i F = -\partial''_k F. \tag{7}$$

$$E_i = -\partial'_i F + y^k \partial_k \partial''_i F + 2z^k \partial'_k \partial''_i F + 3u^k \partial''_k \partial''_i F. \tag{8}$$

Naudodami (5) ir (6) lygybes nesunkiai patikriname, kad dydžiai $\partial''_i \partial''_j F$ ir E_i yra atitinkamai tenzoriaus ir kovektoriaus komponentės. Be to, iš (7) lygybės išplaukia, kad objektas E_i tenkina tokias homogeniškumo sąlygas

$$\begin{aligned} &y^k \partial'_k E_i + 2z^k \partial''_k E_i + 3u^k \partial'''_k E_i = 0, \\ &y^k \partial''_k E_i + 2z^k \partial'''_k E_i = 0, \quad y^k \partial'''_k E_i = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Iš čia išplaukia tapatybės

$$E_i y^i = -F, \quad y^i \partial''_k E_i = -\partial''_k F, \quad \partial'''_k E_i = 3\partial''_i \partial''_k F. \tag{10}$$

Kavagučio erdvės V_n metrinio tenzoriaus $g_{ij}(x^i, y^i, z^i, u^i)$ komponentes apibrėžiame lygybe

$$g_{ij} = \frac{1}{2} \partial''_i \partial''_j F^2 + E_i E_j = \frac{1}{2}(F \partial''_i \partial''_j F + \partial''_i F \partial''_j F) + E_i E_j. \tag{11}$$

Iš šio apibrėžimo išplaukia, kad Kavagučio erdvė gali būti traktuojama kaip trečiosios eilės liestinė sluoksniuotė $T^3 V_n$, kurioje yra apibrėžtas metrinis tenzorius (11). Iš (7) ir (8) lygybių matome, kad tenzoriaus g_{ij} komponentėms yra teisingos tapatybės

$$\begin{aligned} &g_{ij} y^i = -F E_j, \quad y^k \partial'''_k g_{ij} = 0, \\ &y^i \partial'''_k g_{ij} = -3F \partial''_k \partial''_j F, \quad g_{ij} y^i y^j = F^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Nesunkiai įsitikiname, kad

$$g_{ij}(x^k,\overline{y}^k,\overline{z}^k,\overline{u}^k) = g_{ij}(x^k,y^k,z^k,u^k), \tag{13}$$

nes $\overline{u}^k = \frac{1}{2}k''_{tt}y^i + 2k'_t z^i + 3ku^i$. Tuomet iš čia gauname tokių tapatybių teisingumą

$$\begin{aligned} &y^k\partial'_k g_{ij} + 2z^k\partial''_k g_{ij} + 3u^k\partial'''_k g_{ij} = 0,\\ &y^k\partial''_k g_{ij} + 2z^k\partial'''_k g_{ij} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Iš (11) ir (12) lygybių išplaukia, kad metrinis tenzorius g_{ij} yra neišsigimęs, t.y., $\det||g_{ij}|| \neq 0$. Taigi, egzistuoja jam atvirkštinis tenzorius g_{ij}, kurio komponentės tenkina sąlygą

$$g_{jk}g^{ki} = \delta^i_j. \tag{15}$$

Kaip išplaukia iš (5) ir (11) lygybių, metrinio tenzoriaus g_{ij} komponentės yra lygčių sistemos

$$\nabla g_{ij} \equiv 0\big(\operatorname{mod}\omega^p, \theta^p, (\overset{1}{\vartheta})^p, (\overset{2}{\vartheta})^p\big) \tag{16}$$

sprendiniai, čia $\nabla g_{ij} = dg_{ij} - g_{ik}\omega^k_j - g_{kj}\omega^k_i$, o užrašas $\equiv 0(\operatorname{mod}\omega^p, \theta^p, (\overset{1}{\vartheta})^p, (\overset{2}{\vartheta})^p)$ reiškia, kad kairėje pusėje esantis reiškinys tiesiškai išreiškiamas nurodytomis diferencialinėmis formomis. Iš (16) lygybės išplaukia, kad $\nabla\partial'''_k g_{ij} \equiv 0(\operatorname{mod}\omega^p, \theta^p, (\overset{1}{\vartheta})^p, (\overset{2}{\vartheta})^p)$, t.y., dydžiai $\partial'''_k g_{ij}$ yra tenzoriaus komponentės. Pažymėję

$$\gamma^i_j = -\frac{1}{2}g^{pk}z^i(\partial'''_p g_{jk} + \partial'''_k g_{ip} - \partial'''_j g_{pk}), \tag{17}$$

gauname, kad

$$\nabla\gamma^i_j - H^k_j\theta^i_k \equiv 0\big(\operatorname{mod}\omega^p, \theta^p, (\overset{1}{\vartheta})^p, (\overset{2}{\vartheta})^p\big), \tag{18}$$

čia

$$H^k_j = g^{ph}y^k(\partial'''_p g_{jh} + \partial'''_h g_{jp} - \partial'''_j g_{ph}). \tag{19}$$

Pastebime, kad H^k_j yra tenzoriaus komponentės, ir joms yra teisinga lygybė

$$H^k_j y^j = 6Fg^{pk}\partial''_p F. \tag{20}$$

Taigi, tenzorius H^k_j bendru atveju yra neišsigimęs, vadinasi, egzistuoja jam atvirkštinis tenzorius $\widetilde{H}^i_k$, tenkinantis sąlygą

$$H^i_k\widetilde{H}^k_j = \delta^i_j. \tag{21}$$

Iš (18) lygybių matome, kad diferencialinio-geometrinio objekto

$$\Gamma^i_j = \widetilde{H}^i_k \gamma^k_j \tag{22}$$

komponentės tenkina diferencialinių lygčių sistemą

$$\nabla\Gamma^i_j - \theta^i_j \equiv 0\big(\operatorname{mod}\omega^p, \theta^p, (\overset{1}{\vartheta})^p, (\overset{2}{\vartheta})^p\big). \tag{23}$$

Dabar panagrinėkime objektą

$$\beta^i_j = -\frac{1}{3} g^{pq}\big(\partial'''_p(g_{jq}u^i) + \partial'''_q(g_{jp}u^i) - \partial'''_j(g_{pq}u^i)\big), \tag{24}$$

kurio komponentėms gauname

$$\nabla\beta^i_j - H^k_j\vartheta^i_k - \gamma^k_j\theta^i_k \equiv 0\big(\operatorname{mod}\omega^p, \theta^p, (\overset{1}{\vartheta})^p, (\overset{2}{\vartheta})^p\big). \tag{25}$$

Iš čia išplaukia, kad diferencialinio-geometrinio objekto

$$\widetilde{M}^i_j = \widetilde{H}^k_j \beta^i_k \tag{26}$$

komponentės tenkina diferencialinę lygtį

$$\nabla\widetilde{M}^i_j + \Gamma^k_j\theta^i_k - (\overset{1}{\vartheta})^i_j \equiv 0\big(\operatorname{mod}\omega^p, \theta^p, (\overset{1}{\vartheta})^p, (\overset{2}{\vartheta})^p\big). \tag{27}$$

Kaip įrodyta [2] darbe, iš objektų Γ^i_j ir $\widetilde{M}^i_j$, kurių komponentės tenkina (23) ir (27) diferencialines lygtis, galima sukonstruoti dviejų Kavagučio erdvės afininių siečių objektus

$$\begin{aligned} (\overset{1}{\Gamma})^i_{jk} &= \partial'_j\Gamma^i_k - \Gamma^h_j\partial''_h\Gamma^i_k - \widetilde{M}^h_j\partial'''_h\Gamma^i_k, \\ (\overset{2}{\Gamma})^i_{jk} &= \partial''_k M^i_j - \Gamma^h_j\partial''_k\Gamma^i_h - \Gamma^h_k\partial'''_h M^i_j + \Gamma^p_j\Gamma^h_k\partial'''_h\Gamma^i_p, \end{aligned} \tag{28}$$

čia pažymėta

$$M^i_j = \widetilde{M}^i_j + \Gamma^i_p\Gamma^p_j. \tag{29}$$

Taigi, įrodyta tokia teorema:

Teorema. *Kavagučio erdvės metrinės funkcijos F diferencialiniai tęsiniai apibrėžia šios erdvės metrinio tenzoriaus g_{ij} komponentes* (11) *lygybe, šio tenzoriaus diferencialiniai tęsiniai indukuoja dviejų klasikinių šios erdvės afininių siečių $\overset{1}{\Gamma}$ ir $\overset{2}{\Gamma}$ objektus, kurių komponentės apibrėžiamos* (23), (27) *ir* (28) *lygybėmis ir tenkina diferencialines lygtis*

$$\nabla\Gamma^i_{jk} - \omega^i_{jk} \equiv 0\big(\operatorname{mod}\omega^p, \theta^p, (\overset{1}{\vartheta})^p, (\overset{2}{\vartheta})^p\big). \tag{30}$$

Literatūra

[1] V. Bliznikas, Neholonominiai Lie diferencijavimai ir tiesinės sietys atraminių elementų erdvėje, *Liet. Matem. Rink.*, **6**(2), 141–209 (1966).
[2] E. Mazėtis, Apie trečios eilės liestinių sluoksniuočių geometriją, *Lietuvos Matematikų Draugijos Mokslo Darbai*, **4**, 155–160 (2000).

Zur Geometric der Kawaguchische Räumen

E. Mazėtis

Diese Arbeit ist der Theorie der affine Zussamenhängen in der Kawaguchische Räumen gewidmet. Beweisst man, dass metrische Funktion dieser Räumen zwei Objekte affinen Zussamenhängen induziert.