

Vienos modifikuotosios L -eilutės analiziškumo srities korekcija

Eugenijus STANKUS (VU)
el. paštas: eugenijus.stankus@maf.vu.lt

Apibendrintaisiais pirminiais skaičiais vadinama neaprėžtai didėjanti realiųjų skaičių seka $1, q_1, q_2, \dots$, tenkinanti sąlygą

$$1 < q_1 \leq q_2 \leq \dots$$

Multiplikacinės pusgrupės \mathcal{B} , generuotos apibendrintaisiais pirminiais, elementai vadinami Berlingo apibendrintaisiais skaičiais [1]:

$$\mathcal{B} = \{1 = n_1 < n_2 \leq n_2 \leq \dots\}.$$

Kai apibendrintieji pirminiai yra racionalieji sveikieji skaičiai, gali būti formuluojami uždaviniai apie apibendrintųjų sveikųjų skaičių pasiskirstymą aritmetinėse progresijose. Čia taikant analizinius metodus susiduriame su įvairiomis L -funkcijomis, kurių analiziškumo ir augimo greičių tyrimai ir šiaip įdomūs. Šiame darbe apžvelgiami tokių L -funkcijų analiziškumo tyrimai, o taip pat pakoreguojamas vieno ankstesnio darbo šia tema rezultatas.

Jei apibendrintieji pirminiai yra pavidalo vp (čia p – racionalieji pirminiai, o v – natūralusis skaičius), tai atitinkamos L -funkcijos

$$L(s; v, \chi) = \prod_p (1 - \chi(vp)(vp)^{-s})^{-1} \quad (1)$$

analiziškai pratęsimos į pusplokštumą $\sigma > 0$ su „iškarpytomis“ atkarpomis pagal Dirichlė L -funkcijų $L(s, \chi)$ ir jų laipsnių nulius. Pasinaudojus šiuo faktu ir tam tikrais $L(s; v, \chi)$ įverčiais [2] išvesta apibendrintųjų sveikųjų, priklausančių primityviajai progresijai, skaičiaus asimptotinė formulė.

Dar įdomesni apibendrintųjų pirminių sekų $\{p - 1\}$ ir $\{p + 1\}$, kai p perbėga racionaliuosius pirminius, atvejai. Pirmoji apibendrintųjų skaičių sistema tiesiogiai susieta su Oilerio funkcija $\varphi(n)$, o antroji – su daliklių skaičiumi $\sigma(n)$. Kalbant apie šių funkcijų pasiskirstymą aritmetinėse progresijose, vėlgi galima nagrinėti dvi problemas:

1) kaip kinta funkcijų $\varphi(n)$ ir $\sigma(n)$ reikšmės, kai n priklauso progresijai, t.y., surasti sumų

$$\sum_{\substack{\varphi(n) \leq x \\ n \equiv 1 \pmod{k}}} 1 \quad \text{ir} \quad \sum_{\substack{\sigma(n) \leq x \\ n \equiv 1 \pmod{k}}} 1 \quad (2)$$

asimptotines formules;

2) tirti sumų

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \varphi(n) \equiv l \pmod{k}}} 1 \quad \text{ir} \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ \sigma(n) \equiv l \pmod{k}}} 1 \quad (3)$$

asimptotinių elgesį.

Pirmoji problema taikant analizinius metodus susisieja su L -eilučių

$$\Phi(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \varphi(n)^{-s} \quad \text{ir} \quad \Sigma(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \sigma(n)^{-s}, \quad (4)$$

o antroji – su L -eilučių (jas patogiau užrašyti Oilerio sandaugomis)

$$\tilde{\Phi}(s, \chi) = \prod_{p>2} (1 - \chi(p-1)(p-1)^{-s})^{-1} \quad (5)$$

ir

$$\tilde{\Sigma}(s, \chi) = \prod_{p>2} (1 - \chi(p+1)(p+1)^{-s})^{-1} \quad (6)$$

($s = \sigma + it$, $\sigma > 1$) nagrinėjimu. Funkcijos $\Phi(s, \chi)$ ir $\Sigma(s, \chi)$ palyginus lengvai pratęsiamos į pusplokštumą $\sigma > 0$. Tačiau sandaugos $\tilde{\Phi}(s, \chi)$ ir $\tilde{\Sigma}(s, \chi)$ dėl postūmių $p \pm 1$ šiuo požiūriu yra žymiai sudėtingesnės, todėl ir (3) sumų asimptotinės formulės nėra žinomos. Funkcijų $\tilde{\Phi}(s, \chi)$ ir $\tilde{\Sigma}(s, \chi)$ analizinis pratęsimas susiveda į eilutės

$$\sum_p (\chi(p \mp 1) - \chi(p)) p^{-s}$$

nagrinėjimą. Žinoma, antrajam šios eilutės dėmeniui galioja lygybė

$$\sum_p \chi(p) p^{-s} = \ln L(s, \chi) - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\chi(p^m)}{m p^{ms}},$$

kuria ir gali būti pratęstas šios funkcijos analiziškumas į sritį $\sigma > \frac{1}{2}$, kai $L(s, \chi) \neq 0$ ir $L(s, \chi) \neq \infty$ (imant pagrindinę logaritmo šaką). Eilutės

$$\sum_p \chi(p \mp 1) p^{-s} \quad (7)$$

konvergavimo sritis gali būti nustatyta nagrinėjant jos dalinę sumą

$$S(N) = \sum_{p \leq N} \chi(p \mp 1) p^{-s}.$$

Pritaikę jai dalinį integravimą ir pasinaudoję I.M. Vinogradovo įverčiu [4]

$$\sum_{p \leq N} \chi(p+k) \ll Nq^\epsilon (q^{\frac{1}{4}} N^{-\frac{1}{4}} + N^{-0,1}),$$

(čia χ – nepagrindinis charakteris mod q , q – pakankamai didelis pirminis skaičius, k – sveikasis skaičius, $(k, q) = 1$), gausime, jog

$$S(N) \ll N^{0,9-\sigma}.$$

Vadinasi, (7) eilutė tolygiai konverguoja kiekviename pusplotkštumės $\sigma > 0,9$ su išpjautomis atkarpomis $\{s : s = \sigma + it, 0,9 < \sigma \leq 1, t = 0\}$ ir $\{s : s = \sigma + i\gamma, 0,9 < \sigma \leq 1\}$, kai $L(\beta + i\gamma, \chi) = 0$ su $\beta > 0,9$, kompakte.

Taigi turime pakoreguoti [3] darbo apie funkcijų $\tilde{\Phi}(s, \chi)$ ir $\tilde{\Sigma}(s, \chi)$ analiziškumo sritį rezultata: iš pusplotkštumės $\sigma > 0,9$ reikia išpjauti atkarpas $\{s : s = \sigma + it, 0,9 < \sigma \leq 1, t = 0\}$ ir $\{s : s = \sigma + i\gamma, 0,9 < \sigma \leq 1, L(\beta + i\gamma) = 0, \beta > 0,9\}$.

Literatūra

- [1] A. Beurling, Analyse de la loi asymptotic de la distribution des nombres premiers généralisés I, *Acta Math.*, **68**, 225–291 (1937).
- [2] E. Stankus, Analytic continuation of modified L -function, *Lith. Math. J.*, **24**, 176–181 (1984).
- [3] E. Stankus, The generalized numbers and modified L -functions, *Lietuvos Matematikų Draugijos Darbai*, **3**, spec. „Liet. matem. rink.“ priedas, Vilnius, Technika, 100–103 (1999).
- [4] И.М. Виноградов, Оценка одной суммы, распространенной на простые числа арифметической прогрессии, *Изв. АН СССР, Сер. Матем.* **30**, 481–496 (1966).

The correction of analyticity domain of some modified L -series

E. Stankus

The reseaches in analyticity of the modified L -functions are surveyed in the paper. The correction of earlier result is made.