

Atnaujintos matematikos bendrosios programos diegimas: mokymo metodų aspektas, ugdant matematinio komunikavimo kompetenciją

Gabija Pranaitytė^{ID}, Violeta Kravčenkienė, Bronė Narkevičienė

Kauno technologijos universitetas, Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas
Studentų g. 50, LT-51368 Kaunas, Lietuva

El. paštas: gabija.pranaityte@ktu.lt; violeta.kravcenkiene@ktu.lt

El. paštas: brone.narkeviciene@ktu.lt

Įteiktas 2023 rugsėjo 24; publikuotas 2023 lapkričio 20

Santrauka. Straipsnyje pateikiama atnaujintos matematikos brandos programos vienos iš ugdomų kompetencijų – matematinės komunikacijos – ugdymo aspektas. Aptariama šios kompetencijos vieta atnaujintoje ugdymo programoje; atlikta tyrimų, susijusių su matematinė komunikacija, apžvalga; aptarti mokymo metodai ir jų panaudojimas ugdant matematinę komunikaciją. Taip pat straipsnyje pateikiamos metodinės rekomendacijos matematinėi komunikacijai ugdyti.

Raktiniai žodžiai: matematinė komunikacija; atnaujinta matematikos bendroji programa; matematikos mokymo metodai

AMS: 97E40

Mokytoja: Na, Pepe, ar gali man pasakyti, kiek bus sudėjus 7 ir 5?

Pepe: Jei jūs nežinote, tai nemanykite, kad aš jums pasakysiu.

Mokytoja: Tai bus 12.

Pepe: Tai jūs žinote! Kodėl tada manęs klausiate?

(pagal Astridos Lindgren „Pepė Ilgakojinė“)

Įvadas

2022 m. rugsėjo 30 d. Švietimo, mokslo ir sporto ministrės įsakymu Nr. V-1541 [15] buvo patvirtintos 47 bendrosios programos bendrojo lavinimo mokyklai. Tarp jų – Matematikos bendroji programa (toliau – Matematikos programa). Joje nurodomas

„Matematikos dalyko tikslas – sudaryti galimybę kiekvienam mokiniui, mokantis matematikos, ugdytis matematinį ir statistinį raštingumą, kuris šiame dokumente suprantamas kaip įgytas gebėjimas matematiškai samprotauti ir taikyti įgytas kompetencijas, sprendžiant įvairias realias, aktualias ir mokiniams suprantamas problemas“ [15, priedas 20, punktas 7]. Dokumente nurodomos tokios kompetencijos: pažinimo, komunikavimo, skaitmeninė, kūrybiškumo, kultūrinė, pilietiškumo, socialinė, emocinė ir sveikos gyvensenos.

Šiame straipsnyje siekiame aptarti atnaujintos Matematikos bendrosios programos diegimą vienu aspektu: mokymo(si) metodų naudojimą, ugdant matematinio komunikavimo kompetenciją.

Tyrimo tikslas – išanalizuoti matematinio komunikavimo ugdymo tyrimus, siekiant pasiūlyti efektyvius matematikos mokymo metodus šiai kompetencijai ugdyti.

Tyrimo objektas – matematinis komunikavimas ir jo ugdymas.

Tyrimo tikslui pasiekti iškelti tokie uždaviniai:

- 1) išanalizuoti Lietuvos Respublikos ŠMS ministrės įsakymu patvirtintą Matematikos bendrąją programą matematinio komunikavimo vietos joje aspektu;
- 2) atlikti matematinio komunikavimo ugdymo mokslinių tyrimų apžvalgą;
- 3) aptarti matematikos mokymo metodus ir jų naudojimą, ugdant matematinį komunikavimą;
- 4) pateikti rekomendacijas mokymo metodų taikymui matematiniam komunikavimui ugdyti.

Naudoti tyrimo metodai: dokumentų analizė; mokslinės literatūros analizė; lyginamoji analizė.

1 Matematinio komunikavimo vieta Matematikos bendrojoje programoje

Aptarsime Matematikos programoje nurodytą matematikos dalyko (mokymo) tikslą ir Matematikos programos autorių numatytas sąsajas tarp jų įvardintų tikslo, kompetencijų, pasiekimų ir ugdymo turinio, siekdami išsiaiškinti, kokia vieta Matematikos programoje skirta matematiniam komunikavimui.

Matematikos dalyko mokymo tikslas Matematikos programoje yra apibrėžtas taip, kad matematinė komunikacija minima tik netiesiogiai. Netiesiogiai minima, nes tikslė kalbama apie dvejetainį raštingumą – matematinį ir statistinį, kurių kiekvienas savo ruožtu yra kompleksiniai; Matematikos programoje neatskleidžiama, kaip šie terminai turėtų būti suvokiami, kokie yra šių terminų panašumai ir skirtumai, bet nurodoma, kad matematinis ir statistinis raštingumas „šiam dokumente suprantamas kaip įgytas gebėjimas matematiškai samprotauti ir taikyti įgytas kompetencijas“. Dudaitė [8, p. 180], atlikusi išsamią matematinio raštingumo termino analizę, teigia: „Peržvelgus įvairius literatūroje pateikiamus matematinio raštingumo apibrėžimus matyti, kad jie daugmaž skiriasi. Neįmanoma išrinkti vieno apibrėžimo, kuris teisingiausiai apibūdintų nagrinėjamą sąvoką – kiekvienas apibrėžimas pabrėžė tam tikrus svarbius elementus“. Atlikusi mokslinės literatūros analizę, ji nurodo net 21 matematinio raštingumo elementą [8, pp. 180–181]. Tarp autorės nurodytų matematinio raštingumo elementų

yra: loginis (matematinis, kritinis) mąstymas, matematinis argumentavimas, duomenų interpretavimas, duomenų ir rezultatų reprezentavimas, būtinos matematinės žinios, *matematinė komunikacija*. Zybartas [29], remdamasis savo atliktu tyrimu, taip pat nurodo, jog matematinė komunikacija yra matematinio raštingumo komponentė. Taigi tikslė numatyto ugdyti matematinio raštingumo viena iš dedamųjų yra matematinė komunikacija. Matematikos programos autoriai, apibrėždami tikslą, nurodo, kad matematinis ir statistinis raštingumas „šiam dokumente suprantamas kaip įgytas gebėjimas matematiškai samprotauti . . .“. Apie matematinį samprotavimą Norvaiša [19] sako: „Mokyklinės matematikos turinio kontekste matematinis samprotavimas yra: dėsningumų paieška, spėjimų formulavimas, spėjimų bendrinimas ir spėjimų pagrindimas arba paneigimas“. Vadinasi, mokiniai turi mokėti skaityti matematinį tekstą, jį suprasti ir kalbėti matematine kalba, tai yra, matematiškai komunikuoti. Be to, Matematikos programos autoriai, nurodydami matematikos mokymo tikslą, mini įgytų kompetencijų taikymą. Nors Matematikos programoje nurodytos 9 kompetencijos (tarp jų ir komunikavimo kompetencija) matematinėmis nevardinamos, vis dėlto galima atrinkti, kaip komunikavimo kompetencija siejasi su būtent matematinium komunikavimu: Matematikos programos 13 ir 44.13 punktuose atitinkamai rašoma: „Komunikavimo kompetencija. Perprasti ir įvaldyti matematikai būdingą simbolinę kalbą mokiniams padeda situacijos, kuriose atsiveria daug galimybių matematinės sąvokas ir idėjas suprasti, taikyti, kurti, naudojantis įvairiomis priemonėmis (fizinėmis ir skaitmeninėmis) bei išreiškiant įvairiomis formomis (tekstu, vaizdu, simboliais, žodžiu, raštu). Matematinė kalba ugdoma, mokiniams stebint, apibūdinant matematinius modelius ir objektus, tyrinėjant gamtos, socialinius reiškinius, meno, literatūros kūrinius ir kt. Komunikuodami su realiu ar įsivaizduojamu pašnekovu arba grupėje, mokiniai išmoka pasirinkti ir derinti įvairias *matematinio* komunikavimo strategijas, lengviau pajaučia *matematinės* kalbos paskirtį, ypatumus“, „komunikuoti (*matematiškai*) – naudoti matematinę kalbą komunikacijai dalyko viduje ir išorėje, šiam tikslui pasitelkiant veiksmingas *matematinės* išraiškos priemones ir formas“.

Bendrąsias programas lydinčiame dokumente „Kompetencijų raidos aprašas“ teigiama, kad „Visos kompetencijos tarpusavyje susijusios, jos ugdomos integraliai, tik intensyvumas priklauso nuo dalyko specifikos“ [15, 1 priedas, Kompetencijų aprašo 2 punktas]. „Apraše“ komunikavimo kompetencija apibrėžiama taip: „Komunikavimo kompetencija (toliau – KK) – tai *gebėjimas* kurti, perduoti ir suprasti žinias (faktus, požiūrius ar asmenines nuostatas), etiškai naudotis verbalinėmis ir neverbalinėmis komunikavimo priemonėmis ir technologijomis“.

Taigi „Kompetencijų raidos apraše“ ir Matematikos programoje naudojamas tas pats terminas „Komunikavimo kompetencija“, bet terminas aprašytas skirtingai: bendrajame aprašyme KK – tai *gebėjimas* kurti, perduoti ir suprasti žinias, o Matematikos programoje nėra aiškaus „KK – tai . . .“, bet nusakyta, kad matematiškai komunikuoti – tai naudoti matematinę kalbą. Be to, „Kompetencijų aprašo“ įvade teigiama, kad „Kompetencijos ugdomos visų bendrųjų programų mokymo(si) turiniu. Jų ugdymo rezultatai nurodyti dalykų pasiekimų raidos aprašymuose“. Nuoroda, jog kompetencijos ugdomos turiniu, yra svarbus, nes nurodo turinio parinkimo aktualumą.

Matematikos programoje nurodoma, kad „Programoje išskirtos trys pasiekimų sritys“ [15, 20 priedas, 6 punktas] ir jos įvardijamos tokios: gilus supratimas ir argumentavimas; matematinis komunikavimas; problemų sprendimas [15, 20, 21, 22 punktai]. Čia jau naudojamas terminas „matematinis komunikavimas“. Tampa aiš-

ku – matematinis komunikavimas yra vienas iš trijų matematikos mokymo pasiekimų sričių. Tai leidžia manyti, kad vienas iš pagrindinių matematikos mokymo tikslų, nors Matematikos programoje tiesiogiai taip ir nėra nurodyta, yra matematinio komunikavimo/matematinio komunikavimo kompetencijos ugdymas. Be to, kitos dvi pasiekimų sritys – matematikos supratimas ir matematinis argumentavimas bei matematinis problemų sprendimas taip pat yra glaudžiai susiję su matematine kalba ir jos įvaldymu, todėl griežtai atskirti matematinio mąstymo, samprotavimo, argumentavimo, problemų sprendimo gebėjimus nuo matematinio komunikavimo gebėjimų būtų sudėtinga. Jie persipina, yra artimi, nes: viena vertus, matematinės komunikacijos esminiai komponentai – kalba, matematinės terminijos išmanymas ir gebėjimas ją vartoti, gebėjimas skaityti ir suprasti matematinį tekstą; kita vertus, argumentuojant sprendimus, matematinius teiginius, reikia juos susieti tarpusavyje ir iš jų išvesti naujus teiginius, tai kalba yra taip pat būtina. Matematinio argumentavimo, mąstymo, matematinio problemų sprendimo glaudžios sąsajos su matematiniu komunikavimu nurodomos ir mokslinėje literatūroje [1, 2, 3, 14], nors kai kurių šalių matematikos mokymo standartuose matematinio komunikavimo ir matematinio argumentavimo bei matematinio problemų sprendimo kompetencijos yra atskirtos [5, 4, 6, 18]. Matematikos programoje [15, 20 priedas] matematikos pasiekimų sričių aprašyme randame tokius mokinių pasiekimus – žr. 1 lentelę:

1 lentelė. Matematikos programoje nurodomi mokinių pasiekimai.

Supratimas ir argumentavimas	Matematinė komunikacija	Problemų sprendimas
Tinkamai atlieka matematinės procedūras, argumentuoja, kodėl jas taip atlieka (A1);	Analizuoja ir interpretuoja įvairiomis formomis (tekstu, paveikslu, schema, formule, lentele, brėžiniu, grafiku, diagrama) pateikto matematinio pranešimo elementų loginius ryšius (B1);	Analizuoja įvairias problemines situacijas, pasiūlo matematinį modelį problemai išspręsti (C1);
Tyrinėja matematinis objektus, formuluoja hipotezes apie bendras jų savybes ir vieta anksčiau nagrinėtų objektų sistemoje (A2);	Atpažįsta, apibrėžia ir tinkamai vartoja matematinis faktus – terminus, žymėjimą, objektus, įprastus algoritmus ir operacijas (B2);	Pasiūlo, vertina alternatyvias matematinės užduoties sprendimo strategijas, sudaro užduoties sprendimo planą ir jį įgyvendina (C2);
Sukuria nuoseklią, logiškai pagrįstą teiginių seką ar užduoties sprendimą, vertina argumentavimo logiškumą, įrodo matematinis teiginius (A3);	Kuria, pristato matematinį pranešimą: atsirenka reikiamą informaciją, naudojami tinkamomis fizinėmis ir skaitmeninėmis priemonėmis, formomis, tinkamai cituoja šaltinius (B3).	Įvertina matematinės veiklos rezultatus, daro pagrįstas išvadas, jas interpretuoja (C3).
Planuoja, stebi, apmąsto, įsivertina matematikos mokymo(si) procesą ir rezultatus (A4).		

Pasiekimų aprašymai rodo, kad visos trys sritys persipynę, glaudžiai susiję, pavyzdžiui, frazės, aprašančios „formuluoja hipotezes“ – „tinkamai vartoja matematinis faktus – terminus“ – „sudaro užduoties sprendimo planą“, rodo, kad planui sudaryti

reikia hipotezės, o jai suformuluoti reikia tinkamai naudojamų matematinių terminų ir faktų. Apie glaudžius sąryšius rašoma ir pačioje Matematikos programoje: „Išslavinti samprotavimo įgūdžiai suteikia mokiniams galimybę spręsti įvairias problemas, priimti tinkamai pagrįstus sprendimus“ [15, 20 priedas, 20 punktas], „Ji ne tik suteikia galimybę greitai ir veiksmingai komunikuoti įvairių sričių atstovams, bet ir atlaisvina, pagreitina ir abstrahuoja mintį, kartu sudarydama prielaidas ugdyti(s) aukštesniojo lygio mąstymo gebėjimus“ [15, 21 punktas]. „Atkreipkime dėmesį, kad, siekiant ugdyti problemų sprendimo srities pasiekimus, būtina, jog mokiniai turėtų tinkamų įgūdžių veikti kitose dviuose pasiekimų srityse“ [15, 22 punktas].

Kai kurių kitų šalių matematikos mokymo standartai [4, 18] rodo, kad tinkama būtų šias tris pasiekimų sritis laikyti matematinėmis kompetencijomis, be to, būtų tinkama matematikos mokymu ugdomų kompetencijų sąrašą papildyti matematinio modeliavimo kompetencija. Tuomet būtų galima labiau susieti matematikos mokymo tikslą, matematinės kompetencijas ir tai, kokie pasiekimai matuojami. Dabartinė situacija, kai Matematikos programoje matematikos mokymo tikslu nurodomas taikymas 9 kompetencijų, iš kurių tik viena – komunikavimo – dokumento tekste atpažįstama kaip matematinė kompetencija, ir tik jos vienos pasiekimai matuojami, atrodo taisytina.

Taigi matematinio komunikavimo ugdymas yra vienas iš mokinių pasiekimų sričių ir kertinių matematikos mokymo tikslų. Jis siejamas su matematinės kalbos ugdymu, o per tai – su matematinio argumentavimo, mąstymo, problemų sprendimo, matematinio modeliavimo kompetencijomis.

2 Matematinio komunikavimo ugdymo moksliniai tyrimai

Tarptautiniame kontekste terminas *matematinė komunikacija* dažnai apibūdinamas kaip gebėjimai [18, 23]:

- 1) reflektuoti, vizualizuoti ir paaiškinti mintis apie matematinės idėjas žodine ir rašytine kalba;
- 2) suprasti, interpretuoti, įvertinti matematinės idėjas žodžiu, vaizdu, rašytine ir kitomis formomis;
- 3) naudoti matematinės sąvokas, simbolius ir žymėjimus idėjoms ir mintims pristatyti.

Tyrimai rodo, kad matematinė komunikacija, matematinių idėjų analizė ir refleksija, diskusija su bendraamžiais bei rašymas matematinė kalba paveikia mokinių pasiekimus bei mažina jų matematinį nerimą [16]. Matematinė komunikacija sėkmingiau ugdoma, jei atsisakoma tradicinių matematinio ugdymo metodų, kai pagrindinį vaidmenį atlieka mokytojai, t. y., mokytojai pamokos metu paaiškina matematinę medžiagą, o mokiniai lieka pasyvūs, bijantys klausti ar aiškintis [23]. Tyrimai parodė, kad matematinio komunikavimo kompetencijai tobulinti svarbus mokinių tarpusavio bendradarbiavimas, nes jis turi didelės įtakos matematinio komunikavimo įgūdžio formavimuisi, o mokinių bendravimas yra efektyviausias, kai mokytojas veikia kaip tarpininkas – pagalbininkas [26, 28].

Sutama ir kt. [26] atliko tyrimą, kuriuo siekė sukurti matematikos mokymo(si) modelį, kuris veiksmingai gerintų mokymosi pasiekimus. Jie aprašė matematikos mokymo(si) bendradarbiaujant procesą, kuriame stiprinami matematinio komunikavimo

įgūdžiai. Tyrimas buvo atliktas, duomenis renkant vidurinėje mokykloje, naudojant stebėjimą, interviu ir dokumentų analizę. Rezultatai parodė, kad matematikos mokymo(si) bendradarbiaujant procesui reikia mokytojų, kurie būtų mokymosi pagalbininkai ir vadovai. Bendradarbiaujamąjį matematikos mokymą(si) sudaro keli etapai: įvadas (motyvacijos sužadinimas, mokymosi tikslų iškėlimas ir procesų numatymas, susitarimas), pagrindinė veikla (metodai ir mokymosi priemonės parenkamos ir naudojamos pagal mokomąją medžiagą/turinį) ir užbaigimas (refleksija, išvados, baigiamasis testas ir tolesnių veiksmų numatymas). Tyrėjai padarė išvadą, kad mokymasis bendradarbiaujant ugdo mokinių matematinio komunikavimo įgūdžius ir mokinių atsakingumą, drausmingumą, savarankiškumą, kūrybiškumą. Uyen ir kt. [28], siekdami įvertinti tokios mokymo metodikos veiksmingumą, atliko tyrimą. Jo metu buvo atliktas išankstinis testas, intervencija ir testas po intervencijos. Siekiant įvertinti, ar mokiniai padarė pažangą matematinio komunikavimo veikloje, surinkti duomenys buvo analizuojami kiekybiškai ir kokybiškai. Tyrimo metu nagrinėjant panašiųjų trikampių temą, mokinių matematinio komunikavimo įgūdžiams tobulinti buvo naudojamas keturių etapų mokymo procesas. Pirma, mokiniams buvo duota užduotis ir jie dirbo savarankiškai. Antra, atlikę užduotis, mokiniai subūrė grupes ir aptarė užduotį ir jos sprendimą. Grupės darbai buvo pristatomi plakatuose, kuriuos įvertino mokytojas. Trečia, mokytojas pasirinko grupės plakata (dažniausiai tokį, kuriame buvo neteisingi atsakymai) ir paskatino diskusiją. Tokios diskusijos tikslas – lavinti mokinių matematinio mąstymo gebėjimus ir drąsinti įsitraukti į diskusijas. Mokytojas leido mokiniams samprotauti ir diskutuoti apie savo atsakymus, ugdydamas kritinio mąstymo įgūdžius. Ketvirta, mokytojas, remdamasis grupės darbu, pateikė grįžtamąjį ryšį ir paaiškinimus. Mokytojas išaiškino visas klaidas, ir pakomentavo sprendimo būdus. Šiuo grįžtamojo ryšio etapu buvo siekiama sustiprinti mokinių supratimą. Empirinio tyrimo rezultatai parodė, kad daugumos mokinių matematinio komunikavimo įgūdžiai, susiję su panašiais trikampaiais, ženkliai pagerėjo. Tyrimo autoriai rekomendavo stiprinti klausymo, matematinio skaitymo ir konspektavimosi gebėjimus.

Qohar ir Sumarmo, atlikę matematikos mokymo(si) bendradarbiaujant tyrimą [21] pastebėjo, kad teigiamos įtakos matematinės komunikacijos gebėjimams turi metodas, kai mokiniai moko vieni kitus. Sundayna ir kt. [25] išanalizavo Smaldino ir kt. ASSURE mokymosi modelį [24] ir atliko tyrimą. Smaldino aiškina, kad ASSURE (Analyze, State, Select, Utilize, Require and Evaluate) modelį sudaro šeši žingsniai. Pirmasis – tai mokinio savybių analizė (angl. *analyze learner characteristics*). Antrasis – tai standartų ir mokymosi tikslų, kuriuos reikia pasiekti, formulavimas (angl. *state standards and objectives*). Trečiasis – metodų, medijų ir mokymo medžiagos parinkimas (angl. *select methods, media and materials*), ketvirtasis – medijų ir medžiagos naudojimas (angl. *utilize media and materials*). Penktasis žingsnis – mokinių įtraukimas į mokymąsi (angl. *requirement learner participation*). Paskutinis, šeštasis – tai vertinimas ir peržiūrėjimas (angl. *evaluate and revise*). Visi šie komponentai pabrėžia mokinių mokymą sąveikauti, komunikuoti, o ne pasyviai priimti informaciją. Tyrėjai, išanalizavę ASSURE mokymosi modelį, atliko mokinių matematinio komunikavimo gebėjimų tobulinimo, taikant ASSURE (analizuoti, nurodyti, pasirinkti, naudoti, reikalauti ir vertinti), tyrimą. Šiame tyrime taikytas eksperimento su kontroline grupe metodas, mokinių matematinės komunikacijos gebėjimais buvo testuojami prieš poveikį/intervenciją ir po jos. Šio tyrimo metu vienoje mokinių grupėje buvo taikomas ASSURE mokymosi modelis su probleminiu mokymusi (A-PBL), antroje ASSURE

su atradimų mokymosi (A-DL) modeliu, o kontrolinėje grupėje – įprastinis mokymosi modelis su probleminiu mokymusi ir atradimų mokymusi (K-PBL/DL). Buvo nustatyti keturi mokinio matematinio komunikavimo gebėjimų rodikliai: pirma, tinkamai naudoja matematinius simbolius ir terminus, matematinės operacijas, antra, moka pristatyti matematinę idėją – nurodo tai, kas žinoma, formuluoja problemą bei nurodo priežastis, sąryšius, trečia, pateikia problemas paveikslėlių, grafikų, lentelių forma ar algebrine išraiška, ketvirtasis rodiklis – tinkamai aprašo matematinius paveikslėlius, grafikus, lenteles, parašo matematinius sakinius. Remiantis visais rodikliais, labiausiai pagerėjo mokinių, kuriems buvo taikomas ASSURE su probleminiu mokymusi modelis, matematinio komunikavimo gebėjimai pagal trečiąjį rodiklį. Rezultatai parodė, kad mokinių matematinio komunikavimo gebėjimai, taikant ASSURE mokymosi modelį, statistiškai reikšmingai pagerėjo labiau nei mokinių, kurie naudojo įprastinį mokymosi modelį.

Rohmanawati ir kt. [22], tyrinėję mokinių mokymosi stiliaus (palyg. su Kolb tyrimais [13]) įtaką matematinio komunikavimo ugdymui, teigia, kad mokymosi stiliai turi įtakos mokinių matematinio komunikavimo gebėjimams. Mokymosi procese mokytojas turi suprasti ir žinoti kiekvieno savo mokinių mokymosi stilių, kad galėtų tinkamai organizuoti mokymąsi, nes mokiniai, kurie mokosi pagal savo mokymosi stilių, greičiau įsisavina mokomąją medžiagą.

Clark ir kt. [7] tyrinėjo matematinio komunikavimo ugdymo strategijas. Savo straipsnyje mokslininkai nurodo keturias strategijas, skatinančias matematinį komunikavimą mokymo procese. Pirma, turiningų užduočių, skatinančių diskusijas, pateikimas. Tokios matematinės užduotys yra svarbiausia pamokų, kurių pagrindinis tikslas yra matematinio komunikavimo ugdymas, sudedamoji dalis. Atviros ir kompleksinės užduotys, kurios remiasi mokinių ankstesnėmis žiniomis, yra palankios diskusijoms, nes skatina mokinius mąstyti ir remtis vieni kitų idėjomis. Užduotys turėtų būti kelių sudėtingumo lygių, kad mokiniai, turintys skirtingo lygio pradines žinias ir matematinius gebėjimus, galėtų užduotis spręsti ir bendradarbiauti vieni su kitais sprendimo procese. Antra, sukurti ir palaikyti saugią komunikavimui aplinką. Aplinka, kuri yra palanki dalytis idėjomis, pagerina diskusijų kokybę ir kiekybę. Bendravimas mažose grupėse gali būti skatinamas tikslingai suskirsčius mokinius į grupes, skatinant dirbti ir kalbėtis kartu, taip aktualizuojant kiekvieno mokinio indėlio į užduoties atlikimą svarbą. Trečia, paprašyti mokinių paaiškinti ir pagrįsti savo matematinį mąstymą bendraamžiams ir mokytojams nuosekliai ir aiškiai. Paskelbiant savo mąstymą, mokiniams gali tekti diskutuoti dėl savo teiginių prasmės, matematinų idėjų reikšmės, lyginti jas su kitais ir ginti bei pagrįsti savo samprotavimus, išmokti įtikinti kitus, kad jų samprotavimai yra teisingi. Tokio proceso metu mokiniams dažnai sustiprėja motyvacija giliau apmąstyti apie savo idėjas ir savo bendraklasių idėjas. Ketvirta strategija – mokinių skatinimas aktyviai apsvarstyti, aptarti, apgalvoti vieni kitų idėjas. Tam reikia, kad mokiniai atidžiai klausytųsi kitų mąstymo pristatymo, stengtųsi suprasti vieni kitų idėjas. Reikia užtikrinti, kad užsiėmimai klasėje būtų struktūrizuoti, kad mokiniai turėtų pakankamai laiko apsvarstyti kitų idėjas mažose grupelėse ar visoje klasėje.

Hutapea ir kt. [11] ištyrė, kad mokinių matematinio komunikavimo įgūdžiai sparčiai tobulėja, taikant kontekstinį (realiose situacijose) mokymą(si). Šiame tyrime jie naudojo kvaziekperimentą, matematinio komunikavimo įgūdžių testavimą, turėdami kontrolinę grupę. Paroqi ir kt., [20], Ruswanto ir kt. [23] tyrimai parodė, kad realistiško matematinio mokymo (angl. *realistic mathematics education*, RME) modeliai,

kurie fokusuojasi į kasdieninių problemų sprendimą, yra veiksmingi, ugdant matematinę komunikaciją. Triana ir kt. [27] tyrimai parodė, kad geri rezultatai buvo pasiekti, naudojant taip vadinamą smegenimis grįstą mokymo modelį (angl. *brain based learning*, BBL), kuris atsižvelgia į mokinių mokymosi stilius ir gebėjimus, kartu į mokymosi procesą integruojant informacines matematikos vizualizavimo technologijas.

3 Matematinio komunikavimo ugdymo metodai

Aptarus matematinio komunikavimo ugdymo tyrimus, išryškėja matematikos mokymo metodai, kurie naudotini, ugdant matematinį komunikavimą.

Dudzinskienė ir kt. mokymo metodą apibrėžia kaip „mokymo tikslui pasiekti taikomų būdų ir veiksmų visumą“, „mokytojo įrankį, kurį reikia parinkti“ [9, p. 54]. Jovaiša nurodo „mokymo metodas – veiksmų, būdų visuma mokymo tikslui pasiekti. Skiriami žinių perteikimo, įtvirtinimo ir tikrinimo (teikiamieji), atgaminamieji, mokėjimų ir įgūdžių formavimo (operaciniai), mąstančios ir kūrybingos asmenybės ugdymo (kūrybiniai) metodai“ [12, p. 154].

Atlikta analizė leidžia teigti, kad mokinių matematinės komunikacijos gebėjimams ugdyti labai svarbu parinkti tinkamą matematikos mokymo turinį, tačiau ne visada būtinas specialiai pritaikytas turinys ar uždaviniai. Tam tikslui mokytojai gali naudoti metodus, kurie ugdo mokinių gebėjimus tinkamai suprasti kitų naudojamą ir patiems naudoti rašytinę ir žodinę matematinę kalbą, sudarant problemos sprendimo planą, jį argumentuojant, pagrindžiant, aiškinant, apmąstant. Reikia naudoti metodus, kurie moko naudotis vaizdinėmis ir techninėmis priemonėmis, žodžiais, frazėmis, formuluo-tėmis, simboliais. Mokytojui svarbu žinoti, kokį matematinės kalbos mokėjimo lygį mokiniai jau yra įgiję, nes svarbu remtis šiais mokinio jau įgytais ištekliais ir juos toliau plėtoti. Metodų parinkimas turėtų padėti mokytojui konstruoti matematinės komunikacijos kompetencijos ugdymą trimis pagrindinėmis kryptimis: matematikos žodyno turtinimą, matematinės kalbos supratimo, matematinės kalbos naudojimo.

Kuriant ir turtinant mokinio matematikos žodyną, rekomenduojama mokymo procesą organizuoti iš kelių etapų. Pirmasis – parengiamasis etapas. Šiame etape mokytojas ištiria, kokias kalbines priemones (žodžius, frazes, simbolius) mokiniai jau yra įgiję nagrinėjamoje temoje. Antrasis etapas – galima jį pavadinti termino įvedimo etapu. Mokytojas, naudodamas mokinių turimas žinias ir asociacijas, kasdienę kalbą, įveda naujus matematikos terminus vienu iš šių būdų: pats pristato naują terminą, pvz., sandauga, jį apibrėžia, paaiškina ir iliustruoja pavyzdžiais arba duoda mokiniams spręsti uždavinius, o po to kartu su jais, užduodamas pagalbinis klausimas, įveda naują terminą. Trečias etapas – vadinkime jį sujungimo etapu – mokinių prašoma naują žodį, terminą įsirašyti į žodyną, žodžių atmintinę, pavaizduoti kitų mokiniui jau žinomų žodžių kontekste, pvz., naudojant žodžių, simbolių, frazių korteles (loto), piešiant žodžių sąsajų schemas, koncepcijų žemėlapi etc., priklausomai nuo mokinių amžiaus grupės. Ketvirtas etapas – treniruotė. Mokytojas organizuoja uždavinių sprendimą taip, kad mokiniai naudotų savo kalboje naujus terminus, pvz., darbą porose, uždavinio sprendimo vizualizavimą, pažymint jame naują terminą ar simbolį ir kt. Penktasis etapas – supratimo įtvirtinimas. Rekomenduotini metodai: refleksija, klausinėjimas, darbas porose, bet taip, kad mokytojas galėtų įsitikinti teisingu mokinio suvokimu etc. Svarbus aspektas – naudotini keli informacijos priėmimo – perdavimo kanalai, naujai išmoktos informacijos įprasminimas.

Prie matematinės kalbos supratimo prisideda turtingas matematinis žodynas, kurio ugdymo etapus ir galimus metodus aptarėme. Svarbu mokymo(s) procesą organizuoti taip, kad jame mokiniai aktyviai naudotų kalbą (rašytinę ir sakytinę, žodinę) ir būtų skatinami tai daryti, būtų sukuriamos mokymosi situacijos, kuriose reikia matematiškai komunikuoti. Pavyzdžiui, mokytojams siūloma išbandyti uždavinių, kurie turi keletą skirtingų sprendimo būdų, aptarimą heterogeninėse mokinių grupėse. Mokytojas pokalbius grupėse turėtų moderuoti (palyg. neosokrato metodą [17]). Neteisingi sprendimai turėtų būti aptariami bendrai klasėje, ne grupėse.

Matematinės kalbos naudojimui pamokoje yra labai daug galimybių, matematinų metodų pasirinkimui ir mokytojų kūrybai čia daug erdvės. Vis dėlto paminėtina, kad yra prieštarų rekomendacijų. Pavyzdžiui, anot konstruktyvistinių mokymosi teorijų, asmuo konstruoja savo žinias, aktyviai bendradarbiaudamas su kitais, tad pamokos turėtų būti organizuojamos taip, kad mokiniai būtų skatinami aktyviai tyrinėti turinį, konstruoti savo žinias ir mokėjimus, atrasti matematinis dėsnius, plėtoti savo individualius metodus ir strategijas. Tačiau Hattie [10] savo meta-studijoje nustatė, kad tiesioginis mokymas, kai aktyviai veikia tiek mokytojas, tiek bendrai klasė, tiek mokinys individualiai, buvo labai veiksmingas. Iš dalies prieštaringi ir siūlymai, kaip turėtų būti organizuojamos pamokos silpnesniems mokiniams: vieni pabrėžia, kad silpnesniems mokiniams taip pat gali būti naudingi konstruktyvistinėmis teorijomis besivadovaujančio mokytojo metodai, kiti gi įspėja, kad atradimais grindžiami metodai silpnesniems mokiniams gali būti netinkami, nes jie turi nepakankamai ankstesnių žinių ir įgūdžių. Reikalingas reguliarus grįžtamasis ryšys ir vertinimas, mokytojo gebėjimas renkantis mokymo metodus atsižvelgti į mokinių psichologinius, biologinius ir socialinės aplinkos skirtumus.

4 Rekomenduotini metodai

Vadovaujantis Hattie tyrimų rezultatais, galima rekomenduoti mokymo metodus, kurie naudingi ir matematinės komunikacijos ugdymui. Sąrašas nėra baigtinis. Rekomenduojama mokytojams vadovautis savo sukaupta patirtimi ir savo mokinių poreikių pažinimu.

- *Mokinio savęs įsivertinimo arba mokinio lūkesčių metodas*: prieš mokytojui įvertinant kaip mokiniai suprato naują medžiagą, galima paprašyti, kad jie savo supratimą įsivertintų patys. Šią informaciją palyginus su mokytojo įvertinimu galima motyvuoti mokinius siekti dar geresnio rezultato.
- *Klaidų analizės metodas*: mokytojas gali skatinti mokinius analizuoti savo klaidas ir suprasti, kodėl jos buvo padarytos. Tai padeda mokiniams išsiaiškinti klaidingus mąstymo procesus arba strategijas ir ieškoti būdų tobulinti savo supratimą ir sprendimų priėmimo įgūdžius. Atviri klausimai ir refleksija: mokytojas gali užduoti atvirus klausimus, kad skatintų mokinių refleksiją ir išsamų atsakymų apsvaistymą. Tai gali padėti mokiniams pažinti savo mąstymo procesus ir suvokti savo sprendimų priėmimo procesą.
- *Dalykinio bendravimo metodas*: rekomenduojama organizuoti grupines diskusijas, kurių metu mokiniai gali dalintis savo mintimis, paaiškinti savo sprendimus ir klausinėti vienas kitą; skirti laiko ir erdvės mokinių įsitraukimui į dialogą ir argumentuojamą diskusiją.

- *Konceptualaus supratimo metodas*: rekomenduojama užtikrinti, kad mokiniai ne tik žinotų matematikos taisyklės ir procedūras, bet ir suprastų jų prasmę ir taikymą; skatinti juos paaiškinti ir aprašyti matematikos sąvokas ir procedūras savo žodžiais. Taip pat skirti laiko diskusijoms apie tai, kaip tam tikri matematikos principai arba taisyklės gali būti taikomos realiame gyvenime.
- *Individualizuotas mokymas*: rekomenduojama suteikti mokiniams galimybę pasirinkti matematikos užduotis, kurios labiausiai juos domina arba atitinka jų gebėjimus. Taip bus skatinamas mokinių asmeninis suinteresuotumas ir motyvacija matematiškai komunikuoti. Rekomenduojama suteikti individualią paramą ir grįžtamąjį ryšį, kad padėtų mokiniams tobulinti savo komunikacijos įgūdžius ir supratimą.
- *Projektinių darbų metodas*: rekomenduojama organizuoti matematinius projektus, kurie skatina mokinius bendrauti, analizuoti ir pristatyti savo darbą. Projekto metu mokiniai gali rengti pristatymus, rašyti ataskaitas arba kurti multi-medijų turinį.

Literatūra

- [1] I.H. Batubara, S. Saragih, E. Syahputra. Mapping research developments on mathematics communication: bibliometric study by VosViewer. *Al-Ishlah: J. Pendidik.*, **14**(3):2637–2648, 2022.
- [2] S. Bersch. *Mathematisches Argumentieren im Analysisunterricht*. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2023.
- [3] C. Bescherer, A. Hoffkamp. Argumentieren und beweisen mit digitalen Werkzeugen. In G. Pinkernell, F. Reinhold, F. Schacht, D. Walter (Eds.), *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule*, Berlin, Heidelberg, 2022. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-65281-7_15.
- [4] Bildungsplan des Gymnasiums. Mathematik. Baden-Württemberg, 2016. <https://rp.baden-wuerttemberg.de/> [Žiūrėta 2023-07-13].
- [5] Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA), 2022. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf [Žiūrėta 2023-07-13].
- [6] Common Core State Standards for Mathematics, 2022. <https://learning.ccsso.org/wp-content/uploads/2022/11/ADA-Compliant-Math-Standards.pdf> [Žiūrėta 2023-07-13].
- [7] K.K. Clark, J. Jacobs, M.E. Pittman, H. Borko. Strategies for building mathematical communication in the middle school classroom: modeled in professional development, implemented in the classroom. *Curr. Issues Mid. Lev. Educ. CIMLE*, **11**(2):1–12, 2005.
- [8] J. Dudaitė. Matematinio raštingumo samprata. *Acta Paedagog. Vilnensia*, **18**:170–187, 2007. <https://doi.org/10.15388/ActPaed.2007.18.9667>.
- [9] R. Dudzinskienė, D. Kalesnikienė, I. Paurienė, I. Žilinskienė. *Inovatyvių mokymo(si) metodų ir IKT taikymas*. Ugdymo plėtotės centras, Vilnius, 2010. <https://doi.org/10.35445/alishlah.v14i1.925>.
- [10] J. Hattie. *Visible Learning: A Synthesis of over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement*. Routledge, New York, 2009.
- [11] N.M. Hutapea, S. Sakur Saragih. Improving mathematical communication skills of smp students through contextual learning. *J. Phys. Conf. Ser.*, **1351**(1):012067, 2019. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1351/1/012067>.

- [12] L. Jovaiša. *Enciklopedinis edukologijos žodynas*. Gimtasis žodis, Vilnius, 2007.
- [13] A.Y. Kolb, D.A. Kolb. The kolb learning style inventory-version 3.1 2005 technical specifications. *Boston, MA: Hay Resource Direct*, **200**(72):166–171, 2005.
- [14] J. Leisen. *Handbuch Sprachförderung im Fach*. Klett, 2021. https://www.klett-sprach.en.es/downloads/20115/Umfangreicher_5FTeildruck_5Fals_5FDownload/pdf [Žiūrėta 2023-07-13].
- [15] Lietuvos Respublikos Švietimo, mokslo ir sporto ministrės įsakymas Nr. V-1541 su priedais, 2023. <https://e-seimasx.lrs.lt/portal/legalAct/lt/TAD/97b9f31340f311edbf47f0036855e731?jfwid=-pdh4ono0b> [Žiūrėta 2023-06-15].
- [16] L.S. Lomibao, C.A. Luna, R.A. Namoco. The influence of mathematical communication on students' mathematics performance and anxiety. *Am. J. Educ. Res.*, **4**(5):378–382, 2016. <https://doi.org/10.12691/education-4-5-3>.
- [17] R. Loska. *Lehren ohne Belehrung. Leonard Nelsons neosokratische Methode der Gesprächsführung*. Verlag Jlius Klinkhardt, Bad Heilbrunn, 1995.
- [18] NCTM. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia, 2000.
- [19] R. Norvaiša. Projekto „matematinio samprotavimo mokykloje tobulinimas“ pristatymas, įžvalgos ir rekomendacijos mokyklų vadovams, 2022. https://www.nsa.smm.lt/wp-content/uploads/2022/09/Projekto_Matematinio_samprotavimo_mokykloje_tobulinimas_rekomendacijos_2022-09-21.pdf [Žiūrėta 2023-06-15].
- [20] L.L. Paroqi, M. Mursalin, M. Marhami. The implementation of realistic mathematics education approach to improve students' mathematical communication ability in statistics course. *Int. J. Educ. Voc. Studies*, **2**(10):879–889, 2020. <https://doi.org/10.29103/ijevs.v2i10.3311>.
- [21] Improving mathematical communication ability and self regulation learning of junior high students by using reciprocal teaching. *J. Math. Educ.*, **4**(1):59–74, 2013. <https://doi.org/10.22342/jme.4.1.562.59-74>.
- [22] E. Rohmanawati, T.A. Kusmayadi, L. Fitriana. Analysis of students' mathematical communication ability based on Kolb's learning styles of converger and diverger type. *J. Phys. Conf. Ser.*, **1808**:012050, 2020.
- [23] R. Ruswanto, D. Dwijanto, W. Widowati. A realistic mathematics education model includes characteristic to improve the skill of communication mathematic. *Unnes J. Math. Educ. Res.*, **7**(1):94–101, 2018.
- [24] S. Smaldino, J.D. Russel, R. Heinich, M. Molenda. *Instructional Technology and Media for Learning*. Pearson Merrill Prentice Hall, Inc., New Jersey, 2005.
- [25] R. Sundayana, T. Herman, J. Dahlan, R. Prahmana. Using assure learning design to develop students' mathematical communication ability. *World Trans. Eng. Technol. Educ.*, **15**(3):245–249, 2017.
- [26] Sutama, S. Narimo, S. Anif, S.H.N. Hafida, M. Novitasari, W. Purbonuswanto, M.A. Adnan. Collaborative mathematics learning: developing mathematical communication skills of junior high school students. *AIP Conf. Proc.*, **2727**(1):020095, 2023. <https://doi.org/10.1063/5.0141473>.
- [27] M. Triana, C. Zubainur, B. Bahrnun. Students' mathematical communication ability through the brain-based learning approach using autograph. *JRAMathEdu J. Res. Adv. Math. Educ.*, **4**(1):1–10, 2019. <https://doi.org/10.23917/jramathedu.v1i1.6972>.
- [28] B.P. Uyen, D.H. Tong, N.T.B. Tram. Developing mathematical communication skills for students in grade 8 in teaching congruent triangle topics. *Eur. J. Educ. Res.*, **10**(3):1287–1302, 2021.

- [29] S. Zybartas. Matematinė komunikacija – viena matematinio raštingumo komponentų. *Ugdymo problemos*, 5(32):54–82, 2000.

SUMMARY

Revised national mathematics curriculum: improving competence in mathematical communication through teaching methods

G. Pranaitytė, V. Kravčienienė, B. Narkevičienė

The article delves into the topic of mathematical communication development, a key competence outlined in the updated National Mathematics Curriculum. It explores the integration of this competence within the context of the revised curriculum, examining relevant research on mathematical communication and teaching methodologies to foster its growth. Suggestions for pedagogical strategies aimed at enhancing mathematical communication are presented.

Keywords: mathematics communication; revised national mathematics curriculum; mathematics teaching methods