Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
64 tomas, 2023, 50–58
https://doi.org/10.15388/LMR.2023.33596

Įrodymai be žodžių

Edmundas Mazėtis[a], **Grigorijus Melničenko**[b]

[a] *Matematikos institutas, Vilniaus universitetas*
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva
[b] *Švietimo akademija, Vytauto Didžiojo universitetas*
K. Donelaičio g. 58, LT-44248 Kaunas, Lietuva
El. paštas: edmundas.mazetis@mif.vu.lt; gmelnicenko@gmail.com

Įteiktas 2023 liepos 10; publikuotas 2023 lapkričio 20

Santrauka. Paprastai matematinių teiginių įrodymuose figūruoja tiek algebriniai pertvarkymai, tiek loginiai samprotavimai. Bet yra matematinių teiginių, kurių teisingumas matomas iš pirmo žvilgsnio, kai yra tą įrodymą iliustruojantis brėžinys. Nors brėžiniu besiremiantys įrodymai nebūtinai būna pilni ir išsamūs, bet brėžinys padeda pastebėti faktus, kurie po to lengvai pagrindžiami algebros ir logikos pagalba. Straipsnyje pateikiami matematinių teiginių įrodymai, kai, įdėmiai studijuojant brėžinį, pagrindinė įrodymo idėja matoma iš brėžinio, o pats įrodymas tampa gražus ir aiškus.

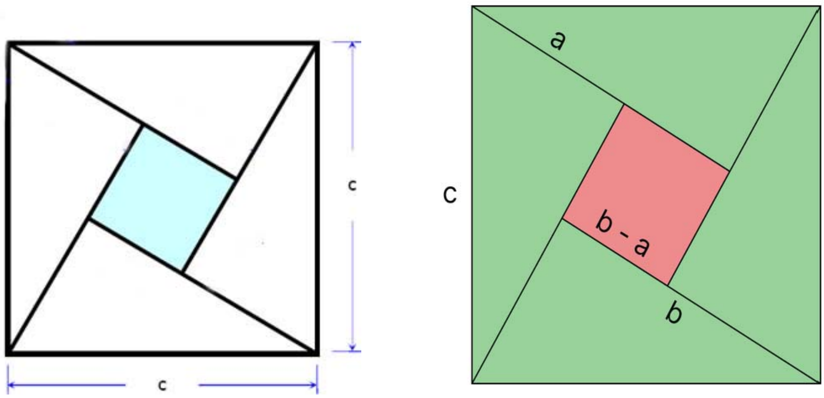
Raktiniai žodžiai: matematiniai teiginiai; įrodymai; brėžinys; įrodymo idėja

AMS: 97G40

Įvadas

1 Pirmas skyrelis

Kaip rašė žymus vengrų kilmės amerikiečių matematikas P. Halmošas (Paul Richard Halmos), geram matematikui yra būtina savybė – tam tikrą situaciją interpretuoti įvairiais būdais. Matematinio teiginio, principo, fakto, metodo suvokimo lygis pasireiškia tuo, kaip besimokantis matematiką sugeba visa tai pateikti įvairiomis formomis skirtingose situacijose. Šiame straipsnyje aptariame, kaip matematiniai teiginiai gali būti pateikiami geometriškai – brėžiniais, kuriuos įdėmiai nagrinėjant, šių teiginių pagrindimas tampa aiškus beveik be žodžių. Tai nereiškia, kad galima išsiversti be

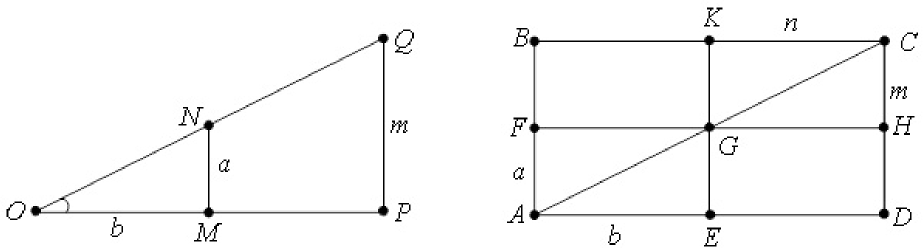


(a) (b)

1 pav.

formulių, lygčių ir kitokių samprotavimų, bet esminis akcentas tampa brėžinių nagrinėjimas. Toks pagrindimo būdas vysto logiką ir matematinį mąstymą, todėl šiame straipsnyje pateikti pavyzdžiai turėtų būti tinkama priemonė mokykloje darbui ne tik su gabiais mokiniais, bet ir su tais, kurių mąstyme vyrauja vizualusis pradas. Kaip teigia istorikai, įrodymų be žodžių idėja kilo viduramžių Indijoje, nes indų mokslininkai nemėgo daug žodžių turinčių tekstų. Pateikiame pavyzdžių [1, 3, 2].

1 pavyzdys – Pitagoro teorema. Yra žinoma per šimtą šios teoremos įrodymų, kurių dauguma, tinkamai nubrėžus brėžinį, tampa aiškūs ir suprantami. Dvyliktojo amžiaus indų matematikas Bhaskara, nubrėžęs tokį brėžinį, kaip 1a pav., vietoje įrodymo parašė „štai“. Aišku, toks įrodymas nėra griežtas, bet brėžinio nagrinėjimas leidžia gauti ir visiškai griežtą įrodymą. Tuo tikslu nagrinėkime 1b pav. Pažymėję keturių lygių stačiųjų trikampių kraštines kaip įprasta a, b, c, lengvai parodome, kad viduryje esantis keturkampis yra kvadratas, jo kraštinė lygi $b - a$. Iš venos pusės keturių stačiųjų trikampių ir viduryje esančio kvadrato plotų suma lygi didžiojo kvadrato plotui c^2, o iš kitos pusės šis plotas lygus keturių stačiųjų trikampių plotų ir vidinio kvadrato plotų sumai, t. y. $c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + (b-a)^2$, taigi $c^2 = a^2 + b^2$ (1b pav.).



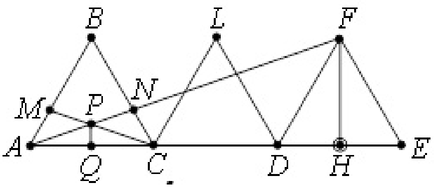
(a) (b)

2 pav.

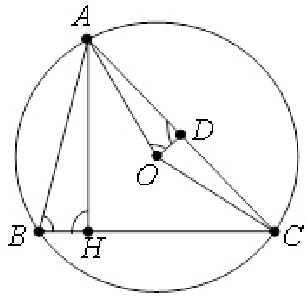
2 pavyzdys – Talio teorema. Jei tiesės $MN \parallel PQ$, tai $\frac{OM}{OP} = \frac{MN}{PQ}$ (2a pav.). Įrodymui sakykime, kad $MN = a$, $PQ = m$, $OM = b$, $OP = n$, nubrėžiame stačiakampį kurio kraštinės lygios $AB = a + m$ ir $AD = b + n$ (2b pav.), atidėkime $AE = BK = b$,

$AF = DH = a$, ir nubrėžkime stačiakampius $AEGF$, $FGKB$, $GHCK$, $EGHD$. Kadangi kampai $\angle GAE = \angle AGF = \angle MON$, $\angle KCG = \angle CGH = \angle POQ = \angle MON = \angle GAE$, tai taškas G yra stačiakampio įstrižainėje AC. Kadangi stačiakampio įstrižainė dalija jo plotą pusiau, tai trikampių AEG ir GHC plotų suma lygi trikampių AFG ir GKC plotų sumai, tai stačiakampių $FGKB$ ir $EGHD$ plotai yra lygūs, t. y. $bm = an$, ką ir reikėjo įrodyti.

3 pavyzdys – mokyklinis uždavinys. Taškai M ir N dalija lygiakraščio trikampio ABC kraštines AB ir AC santykiu $AM : MB = CN : NB = 1 : 2$, atkarpos AN ir CM susikerta taške P. Rasime, kurią dalį trikampio ABC ploto sudaro trikampio APC plotas. Tiesėje AC už taško C atidėkime atkarpas $CD = DE = AC$ ir nubrėžkime lygiakraščius trikampius CLD ir EDF (3 pav.). Kadangi tiesės BC ir FE yra lygiagrečios, o $AE : AC = 3 : 1 = BC : NC = FE : NC$, tai trikampiai ACN ir AEF yra panašieji, todėl taškai A, P, F yra vienoje tiesėje. Jei PQ ir FH yra trikampių APC ir DEF aukštinės, tai $S_{\Delta APQ} : S_{\Delta BFH} = AQ^2 : AH^2 = 1^2 : 5^2 = 1 : 25$. Kadangi trikampių ABC ir FAH aukštinės BQ ir FH vienodos, tai jų plotų santykis $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta FAH} = AC : AH = 2 : 5$, taigi $S_{\Delta FAH} = \frac{5}{2} S_{\Delta ABC}$. Todėl $S_{\Delta APQ} = \frac{1}{25} S_{\Delta AFH} = \frac{1}{25} \cdot \frac{5}{2} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{10} S_{\Delta ABC}$, todėl $S_{\Delta ACP} = 2S_{\Delta APQ} = \frac{1}{5} S_{\Delta ABC}$.



3 pav.

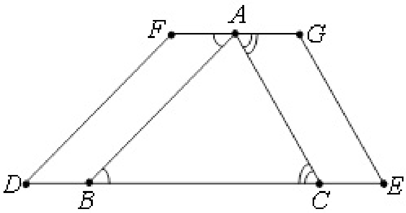


4 pav.

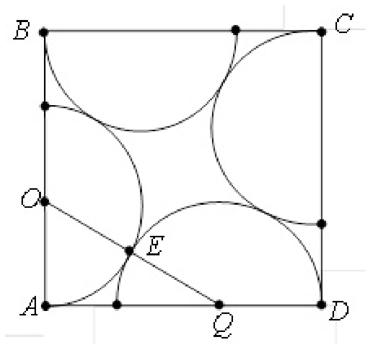
4 pavyzdys – apie trikampį apibrėžto apskritimo spindulys. Visiems žinoma apibrėžto apie trikampį apskritimo spindulio formulė $R = \frac{abc}{4S}$ paprastai įrodoma, taikant sinusų teoremą. Bet galima apseiti ir be jos. 4 pav. pavaizduotas trikampis ABC, atkarpa AH – jo aukštinė, taškas O – apibrėžto apie trikampį apskritimo centras, atkarpa OD yra statmena trikampio kraštinei AC. Kadangi $\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle ABC$, tai statieji trikampiai ABH ir AOD yra panašieji, todėl $\frac{AB}{AH} = \frac{AO}{AD}$. Iš čia $AH = \frac{AB \cdot AD}{AO} = \frac{c\frac{b}{2}}{R}$, todėl trikampio ABC plotas $S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{abc}{4R}$, todėl $R = \frac{abc}{4S}$.

5 pavyzdys – sinusų teorema. 5 pav. nubrėžtas trikampis ABC, tiesėje BC atidėtos atkarpos $BD = CE$ ir nubrėžti lygiagretainiai $BDFA$ ir $CEGA$. Kadangi šių lygiagretainių kraštinės BD ir CE lygios, o jų aukštinės iš viršūnės A į šias kraštines irgi lygios, tai šių lygiagretainių plotai yra lygūs: $AB \cdot AF \cdot \sin\angle B = AC \cdot AG \cdot \sin\angle C$, taigi $\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{AC}{\sin\angle B}$.

6 pavyzdys – japonų Sangaku šventyklų geometrija. 6 pav. parodytas tradicinės japonų geometrijos Sangaku uždavinys – keturi pusskrituliai, kurių spinduliai lygūs 2, jų centrai yra kvadrato kraštinėse, kiekvienas tų pusskritulių liečia du iš trijų likusių



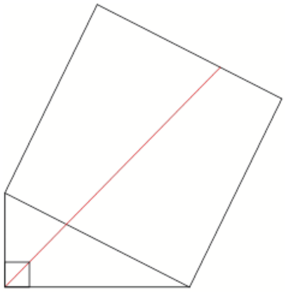
5 pav.



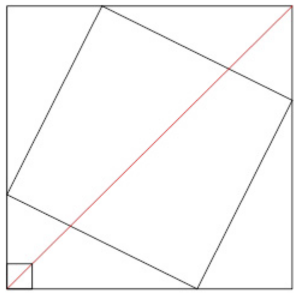
6 pav.

pusskritulių. Rasime kvadrato kraštinės ilgį. Sprendimui sakykime, kad pusskritulių centrai O ir Q yra kvadrato kraštinėse AB ir AD, o taške E tie pusskrituliai liečiasi. Taškai O, E, Q yra vienoje tiesėje ir $OQ = OE + EQ = 4$. Kadangi $AO = 2$, tai stačiojo trikampio AOQ statinis $AQ = \sqrt{OQ^2 - AO^2} = \sqrt{12}$, todėl kvadrato kraštinė lygi $\sqrt{12} + 2$.

7 pavyzdys – pusiaukampinė dalija kvadrato plotą pusiau. Stačiojo trikampio įžambinė yra kvadrato kraštinė (7a pav.). Stačiojo kampo pusiaukampinė dalija kvadrato plotą pusiau. Įrodymas gaunamas nubrėžus 7b pav., nes pribrėžti trikampiai yra lygūs, gauto didžiojo kvadrato ir duotojo mažojo kvadrato centrai sutampa, abiejų kvadratų įstrižainė eina per jų bendrą centrą, o bet kuri tiesė, einanti per kvadrato centrą, dalija jo plotą pusiau.



(a)

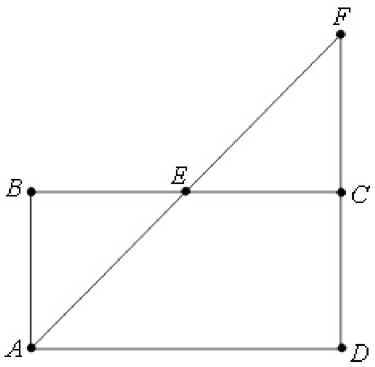


(b)

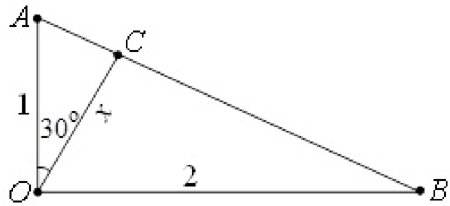
7 pav.

Dabar pateikiame pavyzdžių, kai geometrinė interpretacija padeda pagrindžiant algebrinių tapatybių teisingumą.

8 pavyzdys – aritmetinio ir geometrinio vidurkio nelygybė. Pavyzdys parodo, kaip geometriškai gali būti interpretuojama žinoma teigiamų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybė $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, $a > 0$, $b > 0$. Sakykime, kad $ABCD$ yra stačiakampis, kurio kraštinių ilgiai $AB = x$, $AD = y$ (8 pav.), kampo A pusiaukampinė kraštinę BC kerta taške E, o tiesę DC – taške F. Kadangi $\angle BAE = \angle DAF = 45°$, tai $AB = BE = x$, $AD = DF = y$. Tuomet trikampių ABE ir ADF plotai atitinkamai lygūs $\frac{1}{2}x^2$ ir $\frac{1}{2}y^2$. Kadangi šių trikampių plotų suma yra ne mažesnė už stačiakampio plotą, todėl $xy \leqslant \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Pažymėję $x^2 = a$, $y^2 = b$, gauname įrodomąją nelygybę. Lygybė gaunama tada, kai taškas F sutampa su tašku C, t. y. kai stačiakampis yra kvadratas ir $a = b$.



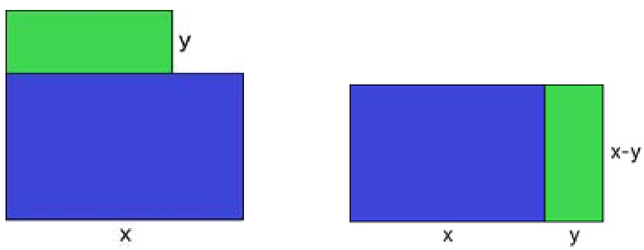
8 pav.



9 pav.

9 pavyzdys – reiškinio mažiausia reikšmė. Rasime mažiausią reikšmę reiškinio $\sqrt{x^2 - 2x + 4} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$. Tuo tikslu nubrėžkime statųjį kampą AOB ir jo kraštinėse atidkime atkarpas $OA = 1$, $OB = 2$ (9 pav.). Sakykime, kad kampo viduje nubrėžėme atkarpą OC, sudarančią su atkarpa OA 30° kampą ir jos ilgį pažymėkime x. Pagal kosinusų teoremą $AC = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$, $BC = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$). Šių atkarpų suma yra mažiausia, kai taškas C yra atkarpoje AB, taigi mažiausia duotojo reiškinio reikšmė lygi atkarpos AB ilgiui, t. y. $\sqrt{5}$.

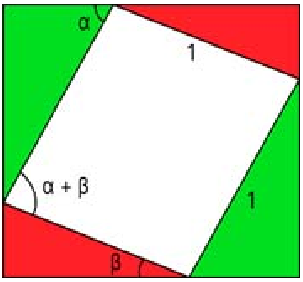
10 pavyzdys – skaičių kvadratų skirtumas. 10a pav. ir 10b pav. brėžiniuose pateikta geometrinė trumposios daugybos formulės $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ interpretacija. Nuo kvadrato, kurio kraštinė lygi x, nupjautas mažesnis kvadratas, kurio kraštinė lygi y. Tuomet gautosios figūros plotas lygus $x^2 - y^2$. Jei viršutinį stačiakampį perkelsime taip, kad atkarpos, kurių ilgiai $x - y$ sutaptų, tuomet gausime stačiakampį, kurio kraštinės lygios $x - y$ ir $x + y$, todėl jo plotas yra $(x - y)(x + y)$.



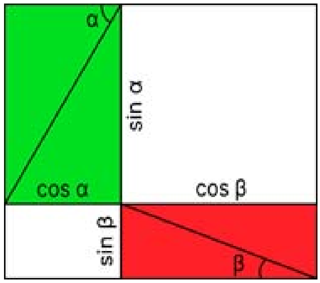
(a) (b)

10 pav.

11 pavyzdys – kampų sumos sinusas. 11a pav. ir 11b pav. paveikslėliuose parodytas trigonometrinės tapatybės $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ įrodymas. 11a pav. stačiakampyje nubrėžti keturi statieji trikampiai, kurių įžambinių ilgiai lygūs 1, o pažymėti smailieji kampai lygūs α ir β. Akivaizdu, kad dviejų lygių stačiųjų trikampių statinių ilgiai $\sin\alpha$ ir $\cos\alpha$, o kitų dviejų lygių stačiųjų trikampių statiniai – atitinkamai $\sin\beta$ ir $\cos\beta$.



(a)

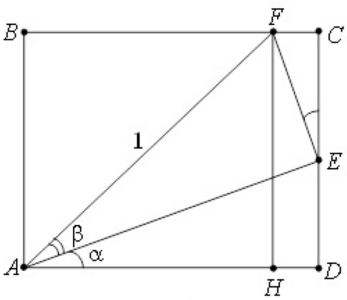


(b)

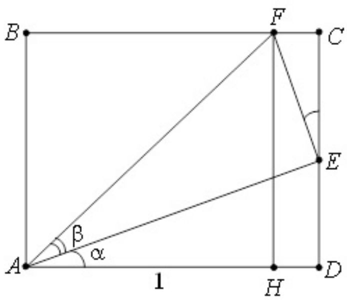
11 pav.

Viduje esantis keturkampis yra rombas, nes jo visos kraštinės lygios 1, o jo kampas, kaip nesunku nustatyti, lygus $\alpha+\beta$. Todėl jo plotas lygus $\sin(\alpha+\beta)$. Kitaip sudėliojus stačiuosius trikampius (11b pav.), gautojo rombo plotas yra lygus dviejų stačiakampių plotų sumai. Vieno jų kraštinės lygios $\sin\alpha$ ir $\cos\beta$, o kito – $\sin\beta$ ir $\cos\alpha$. Iš čia ir gauname įrodomąją tapatybę.

12 pavyzdys – kampų sumos sinusas ir kosinusas. Dar vienas analogiškų lygybių geometrinio įrodymo pavyzdys pateiktas 12 pav. Nubrėžtas statusis trikampis DAE, $\angle DAE = \alpha$ ir kitas statusis trikampis AEF, $\angle EAF = \beta$, $AF = 1$, tiesėje DE randamas taškas C, kad kampas DCF būtų statusis. Kampų DAE ir FEC atitinkamos kraštinės yra statmenos, todėl $\angle FEC = \angle DAE = \alpha$. Iš taško F nuleidžiame statmenį $FH \perp AD$, taigi keturkampis $HDCF$ yra stačiakampis. Tuomet iš stačiųjų trikampių randame, kad $FH = AF\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)$, $AH = AF\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta)$, $FE = AF\sin\beta = \sin\beta$, $AE = AF\cos\beta = \cos\beta$, $DE = AE\sin\alpha = \cos\beta\sin\alpha$, $AD = AE\cos\alpha = \cos\beta\cos\alpha$, $EC = EF\cos\alpha = \sin\beta\cos\alpha$, $CF = EF\sin\alpha = \sin\beta\sin\alpha$. Tuomet akivaizdžios lygybės $FH = CD = DE + EC$ ir $AH = AD - DH = AD - CF$ yra užrašomos taip: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.



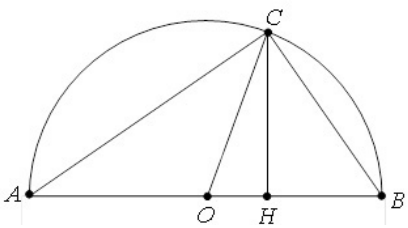
12 pav.



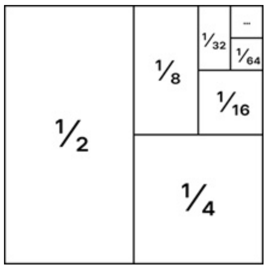
13 pav.

13 pavyzdys – kampų sumos tangentas. Analogiškai galima gauti ir tangentų sumos formulę. Nubrėžkime statųjį trikampį DAE, $\angle DAE = \alpha$, $AD = 1$, ir kitą statųjį trikampį AEF, $\angle EAF = \beta$. Tiesėje DE randamas taškas C, kad kampas DCF būtų statusis (13 pav.). Kampų DAE ir FEC atitinkamos kraštinės yra statmenos, todėl $\angle FEC = \angle DAE = \alpha$. Iš taško F nuleidžiame statmenį $FH \perp AD$, taigi keturkampis $HDCF$ yra stačiakampis. Tuomet iš stačiųjų trikampių randame, kad $AE = \frac{AD}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$, $DE = AD\,\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha$, $FE = AE\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\cos\alpha}$, $CE = FE\cos\alpha = \mathrm{tg}\,\beta$, $CF = EF\sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\cos\alpha}\sin\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$, $FH = AH\,\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = (1-CF)\,\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = (1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta)(\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta)$. Kadangi $FH = CD = \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta$, tai iš čia išplaukia įrodomoji lygybė $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$.

14 pavyzdys – pusės kampo tangentas. Dar vienas pavyzdys – pusės kampo tangento formulės $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Įrodymui nubrėžiame vienetinio spindulio $OB = OA = OC = 1$ pusskritulį, kurio skersmuo – atkarpa AB, o centras – taškas O. Sakykime, kad pusapskritimo taškas C yra toks, kad $\angle COB = \alpha$, todėl $\angle CAB = \frac{\alpha}{2}$ (14 pav.). Nubrėžkime $CH \perp AB$, tuomet iš stačiųjų trikampių turime $OH = OC\cos\alpha = \cos\alpha$, $AH = AO+OH = 1+\cos\alpha$, $CH = AH\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = (1+\cos\alpha)\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$, kita vertus $CH = OC\sin\alpha = \sin\alpha$. Iš šių atkarpos CH išraiškų išplaukia pirmoji lygybė $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Antroji lygybė $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ gaunama pastebėjus, kad kampas ACB yra statusis, todėl $\angle BCH = \angle CAB = \frac{\alpha}{2}$, o $\mathrm{tg}\,\angle BCH = \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{HB}{CH} = \frac{OB-OH}{CH} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.



14 pav.

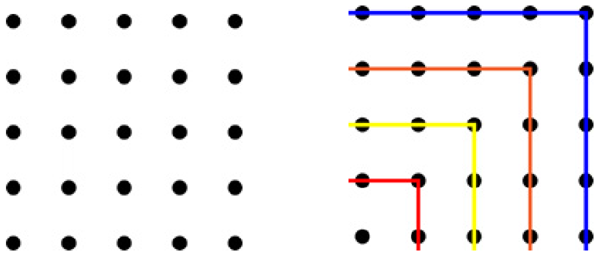


15 pav.

15 pavyzdys – begalinė geometrinė progresija. Venetinį kvadratą (15 pav.), padalijame pusiau, vieną jo pusę – dar pusiau ir t. t. Kadangi visų dalių suma sudaro visą kvadratą, tai sumuodami jų plotus turime lygybę $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$.

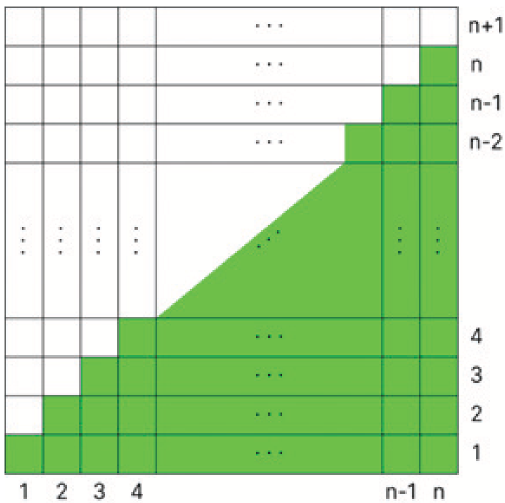
16 pavyzdys – taškai ir laužtės. Tai yra geometrinė žinomos lygybės $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$ interpretacija. Pažymėkime n^2 taškų (mūsų pavyzdyje $n = 5$) kaip parodyta 16a pav., o po to sujunkime taškus taip, kai parodyta 16b pav. Akivaizdu, kad vienas taškas su niekuo nesujungtas, pirmoji laužtė jungia 3 taškus, antroji – 5 taškus, tolimesnės jungia 7 ir 9 taškus. Iš čia akivaizdu, kad $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$, taigi įrodomoji lygybė patikrinta, kai $n = 5$, analogiškai ji patikrinama ir bet kuriam nelyginiam n.

17 pavyzdys – naturaliųjų skaičių suma. Parodyta, kaip galima geometriškai iliustruoti lygybę $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Tuo tikslu stačiakampį, kurio ilgis lygus n, o plotis lygus $n + 1$, padalijame į vienetinius kvadratėlius (17 pav.). Po to viršutinę eilutę paliekame neuždažytą, antrojoje eilutėje uždažome vieną kairįjį laukelį, trečiojoje – du kraštinius kairėje pusėje esančius laukelius, ketvirtoje – tris, ir taip toliau,



(a) (b)

16 pav.



17 pav.

paskutinėje $n+1$ – ojoje eilutėje uždažome visus n laukelių. Taigi uždažyta viso yra $1+2+3+\cdots+n$ laukelių. Kadangi bet kuriam k, $1 \leqslant k \leqslant n$ yra eilutė, kurioje uždažyta k laukelių ir eilutė, kurioje yra neuždažyta k laukelių, tai uždažyta pusė visų lentelės laukelių, kurių yra $n(n+1)$.

Literatūra

[1] C. Alsina, R.B. Nelsen. *Proofs Without Words. Exercises in Visual Thinking*. MAA Press, Washington, 2020.

[2] R.B. Nelsen. *Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics (Classroom Resource Material)*. MAA Press, Washington, 2006.

[3] E. Southall, V. Pantaloni. *Geometry Snacks: Bite Size Problems and Multiple Ways to Solve Them)*. Tarquin Publications, Holywell Hill, 2018.

SUMMARY

Proofs without words

E. Mazėtis, G. Melničenko

Usually, proofs of mathematical statements involve both algebraic rearrangements and logical reasoning. But there are mathematical statements whose truth is obvious at first glance when there is a diagram illustrating that proof. Although the proofs based on the drawing are not necessarily full and complete, but the drawing helps to notice facts that are then easily supported by algebra and logic. The paper presents proofs of mathematical propositions where, upon careful study of the drawing, the main idea of the proof can be seen from the drawing, and the proof itself becomes beautiful and clear.

Keywords: mathematical propositions; proofs; drawing; proof idea