Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 681–685

О равномерной сходимости многомерных разрывных функций распределения

Римас БАНИС (VGTU)
e-mail: rimasbanys@takas.lt

В работе Ю. Мачиса [1] исследуется равномерная сходимость функций распределения. Полученные результаты ведут к интересным и порою неожиданным выводам. Показано, что разложения любой имеющей хотя бы один скачок функции распределения устойчивы в равномерной метрике. Использование полученных результатов упрощает построение оценок устойчивости для разрывных функций распределения, позволяет решить вопрос о необходимых и достаточных условиях равномерной сходимости функций распределения сумм независимых случайных величин.

В настоящей заметке результаты [1] обобщаются на случай многомерных функций распределения. Для простоты изложения мы ограничиваемся двумерными функциями, т.е. распределениями двумерных случайных векторов.

Обозначим через R^2 двумерное евклидово пространство с обычной нормой $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $x = (x_1, x_2) \in R^2$, а через $\mathcal{R}^2$ – σ-алгебру борелевских множеств. Запись $x < y$ ($x \leqslant y$) будет означать, что $x_i < y_i$ ($x_i \leqslant y_i$), $i = 1, 2$.

Каждой вероятностной мере P на $(R^2, \mathcal{R}^2)$ соответствует функция распределения (ф.р.) F, определяемая равенством

$$F(x) = P\{y\colon\ y \leqslant x\}, \quad x \in R^2.$$

Класс всех таких функций распределения обозначим $\mathcal{F} = \mathcal{F}(R^2)$.

Будем рассматривать пространство $\mathcal{F}$ с равномерной метрикой

$$\varrho(F, G) = \sup_x |F(x) - G(x)|\,.$$

Пусть $x = (x_1, x_2) \in R^2$. Положим

$$\begin{aligned}
U^{(1)}(x) &= \{y = (y_1, y_2)\colon\ y_1 \geqslant x_1,\ y_2 \geqslant x_2\},\\
U^{(2)}(x) &= \{y\colon\ y_1 < x_1,\ y_2 \geqslant x_2\},\\
U^{(3)}(x) &= \{y\colon\ y_1 < x_1,\ y_2 < x_2\},\\
U^{(4)}(x) &= \{y\colon\ y_1 \geqslant x_1,\ y_2 < x_2\}.
\end{aligned}$$

Для произвольной ф.р. $F \in \mathcal{F}$ и каждого $x \in R^2$ существуют пределы

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in U^{(i)}(x)}} F(y), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

и функция F непрерывна сверху, т.е.,

$$F(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in U^{(1)}(x)}} F(y) = \max_{i=1,2,3,4} \lim_{\substack{y \to x \\ y \in U^{(i)}(x)}} F(y)$$

для всех $x \in R^2$ (ср. [2], [3]). Обозначим $F(x-0) = \lim\limits_{\substack{y \to x \\ y \in U^{(3)}(x)}} F(y)$.

Множество $[a, b) = \{x \in R^2\colon\ a \leqslant x < b\}$ будем называть прямоугольником. Каждый конечный набор точек $x_1^1 < x_1^2 < \ldots < x_1^m$ и $x_2^1 < x_2^2 < \ldots < x_2^n$ порождает разбиение плоскости R^2 на прямоугольники

$$D^{ij} = \left\{y = (y_1, y_2)\colon\ x_1^i \leqslant y_1 < x_1^{i+1},\ x_2^j \leqslant y_2 < x_2^{j+1}\right\},$$
$$i = 0, 1, \ldots, m, \quad j = 0, 1, \ldots, n, \quad x_1^0 = x_2^0 = -\infty, \quad x_1^{m+1} = x_2^{n+1} = +\infty.$$

Класс всех таких разбиений плоскости обозначим $\mathcal{D}$.

Лемма. *Пусть $F \in \mathcal{F}$. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $D = \{D^{ij}\} \in \mathcal{D}$, что для всех i, j*

$$\sup_{x, y \in D^{ij}} |F(x) - F(y)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть P будет вероятность на R^2, отвечающая функции распределения F. По данному $\varepsilon > 0$ найдем квадрат A такой, что

$$P(A) > 1 - \varepsilon. \tag{2}$$

Пусть $x = (x_1, x_2) \in A$. Для $\delta > 0$ обозначим $A_\delta(x) = \{y = (y_1, y_2)\colon\ x_1 - \delta < y_1 < x_1 + \delta,\ x_2 - \delta < y_2 < x_2 + \delta\}$.

При достаточно малом $\delta > 0$ имеем

$$\max_{i=1,2,3,4} \omega_F\left(U^{(i)}(x) \cap A_\delta(x)\right) < \varepsilon,$$

где $\omega_F(B)$, $B \subset R^2$, – изменение функции F на B, т.е.,

$$\omega_F(B) = \sup_{x, y \in B} |F(x) - F(y)|.$$

Таким образом, открытый квадрат $A_\delta(x)$ разбивается на четыре квадрата, в каждом из которых изменение функции F меньше чем ε, т.е.,

$$A_\delta(x) = \bigcup_{i=1}^{4} A_\delta^i(x), \quad \omega_F(A_\delta^i(x)) < \varepsilon, \quad i = 1,2,3,4.$$

Для каждого $x \in A$ найдем такой квадрат $A_\delta(x)$, $\delta = \delta(x)$, и так получим открытое покрытие $\{A_\delta(x),\ x \in A\}$ квадрата A, из которого можно выделить конечное подпокрытие $\{A_k = A_{\delta_k}(x_k),\ k = 1,\dots,m\}$. Каждый квадрат A_k разбит на части $A_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_k^i$ так, что

$$\omega_F(A_k^i) < \varepsilon, \quad i = 1,2,3,4. \tag{3}$$

Система $\{A_k^i,\ i = 1,2,3,k,\ k = 1,\dots,m\}$ порождает разбиение квадрата A и плоскости R^2 на прямоугольники D^{ij}, для которых, ввиду (2) и (3), выполнено (1).

Функцию распределения будем называть простой, если она принимает лишь конечное число значений. Очевидно, что каждая простая ф.р. принимает постоянные значения на прямоугольниках некоторого разбиения из $\mathcal{D}$, т.е. если F – простая ф.р., то существует разбиение $\{D^{ij}\}$ из $\mathcal{D}$ и числа a_{ij} такие, что

$$F(x) = \sum_{i,j} a_{ij}\chi_{D^{ij}}(x),$$

где $\chi_{D^{ij}}$ – индикатор множества D^{ij}. Класс всех простых ф.р. будем обозначать $\mathcal{F}_0$. Из леммы следует, что каждая ф.р. может быть равномерно приближена простыми ф.р., т.е. $\mathcal{F}_0$ является всюду плотным подмножеством $\mathcal{F}$ относительно равномерной метрики.

Определение. Будем говорить, что последовательность ф.р. $\{F_n\}$ слабо сходится к ф.р. F, если $F_n(x) \to F(x)$ в каждой точке непрерывности F.

Будем говорить, что последовательность ф.р. $\{F_n\}$ сильно сходится к ф.р. F, если

$$F_n(x) \to F(x), \quad F_n(x-0) \to F(x-0)$$

в каждой точке.

Равномерная метрика ϱ метризует сильную сходимость ф.р., подобно тому как метрика Леви–Прохорова метризует слабую сходимость.

Теорема 1. *Последовательность ф.р. $\{F_n\}$ сильно сходится к ф.р. F тогда и только тогда, когда $\varrho(F_n, F) \to 0$.*

Теорема 2. *Пространство $\mathcal{F}$ с равномерной метрикой ϱ полно.*

Доказательства аналогичных утверждений для одномерного случая, приведенные в [1], без труда переносятся на многомерный случай, поэтому мы не будем их приводить.

Пусть $D \in \mathcal{D}$ будет конечным разбиением плоскости R^2, которое составляют прямоугольники D^{ij}. Положим

$$\omega'_F(D) = \max_{ij} \omega_F(D^{ij}),$$

где $\omega_F(D^{ij})$ – изменение ф.р. F на D^{ij}.

Теорема 3. *Семейство $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ является ϱ-предкомпактным тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует разбиение D_ε из $\mathcal{D}$ такое, что*

$$\sup_{F \in \mathcal{G}} \omega'_F(D_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{4}$$

Доказательство. Поскольку пространство $(\mathcal{F}, \varrho)$ полно, то для доказательства достаточности условия (4) нужно лишь показать, что множество $\mathcal{G}$ является вполне ограниченным относительно метрики ϱ. Пусть $\varepsilon > 0$ и $D_\varepsilon = \{D^{ij}\} \in \mathcal{D}$ удовлетворяет (4). Обозначим через H конечную ε-сеть в интервале $[0, 1]$, а $\mathcal{G}_0$ – конечное множество простых ф.р. из $\mathcal{F}_0$, которые на каждом прямоугольнике D^{ij} принимают постоянное значение из H. В силу (4) $\mathcal{G}_0$ является 2ε-сетью для множества $\mathcal{G}$. Таким образом, множество $\mathcal{G}_0$ вполне ограничено.

Пусть теперь $\mathcal{G}$ ϱ-предкомпактно. При данном $\varepsilon > 0$ найдем конечную $\varepsilon/2$-сеть $\{G_1, \ldots, G_n\}$ для множества $\mathcal{G}$. По лемме существуют такие конечные разбиения $D_k \in \mathcal{D}$, $k = 1, \ldots, n$, что $\omega'_{G_k}(D_k) < \varepsilon/2$, $k = 1, \ldots, n$. Если $D_k = \{D_k^{ij}\}$, то всевозможные пересечения $D_k^{ij} \cap D_l^{pq}$ образуют новое конечное разбиение плоскости, которое обозначим через D. Разбиение D мельче чем любое D_k, поэтому $\omega'_{G_k}(D) < \varepsilon/2$, $k = 1, \ldots, n$. А так как $\{G_k, k = 1, \ldots, n\}$ является $\varepsilon/2$-сетью для $\mathcal{G}$, то (4) выполняется с $D_\varepsilon = D$.

Доказанная теорема позволяет получить необходимые и достаточные условия сходимости ф.р. сумм независимых случайных векторов к предельной ф.р. в равномерной метрике. В качестве примера приведем необходимые и достаточные условия сильной сходимости распределений F_n центрированных сумм

$$X_n = \xi_{n1} + \cdots + \xi_{nk} - A_n \tag{5}$$

независимых двумерных векторов ξ_{nk} с ф.р. G_{nk} к распределению случайного вектора $X = (X_1, X_2)$, имеющего независимые компоненты с характеристическими функциями

$$E\exp\{itX_r\} = \exp\left\{\lambda_r\left(e^{it} - 1\right)\right\}, \quad r = 1, 2. \tag{6}$$

Теорема 4 (ср. [1, Теорема 8], [4, с. 144]). *Последовательность функций распределения сумм* (5) *бесконечно малых случайных векторов сильно сходится к ф.р. случайного вектора с независимыми компонентами, имеющими характеристические функции* (6), *тогда и только тогда, когда существуют такие постоянные векторы* a_{nk}, $\sum_{k=1}^{k_n} a_{nk} = A_n$, *что для ф.р.* $F_{nk}(x) = G_{nk}(x + a_{nk})$ *выполняются условия*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} P_{nk}(1,1) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} P_{nk}^r(1) \to \lambda_r, \quad r = 1, 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} [1 - P_{nk}^r(0) - P_{nk}^r(1)] \to 0, \quad r = 1, 2,$$

где $P_{nk}(1,1)$ *- скачок ф.р.* F_{nk} *в точке* $(1,1)$, $P_{nk}^r(\cdot)$ *- скачок* F_{nk}^r *в точке, указанной в скобках, а* F_{nk}^r *- маргинальная ф.р.* r*-ой компоненты.*

Литература

[1] Ю. Мачис, Устойчивость разложений на компоненты разрывной функции распределения в равномерной метрике, *Liet. Matem. Rink.*, **1**, 105–117 (1995).

[2] M.L. Straf, Weak convergence of stochastic processes with several parameters, in: *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Probab.*, Berkeley (1972).

[3] Р. Банис, Д. Сургайлис, О слабой сходимости случайных полей, *Liet. Matem. Rink.*, **2**, 169–184 (1999).

[4] Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогоров, *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*, Гостехиздат, Москва, Ленинград (1949).

Apie trūkiųjų daugiamačių pasiskirstymo funkcijų tolygųjį konvergavimą

R. Banys

Nagrinėjama dvimačių pasiskirstymo funkcijų erdvė su tolygiąja metrika. Įrodytas kompaktiškumo kriterijus, kurį galima taikyti nustatant būtinąsias ir pakankamąsias atsitiktinių vektorių sumų konvergavimo sąlygas.