

Idealizuotos plėvelės modeliai ir optimalūs tinklai: uždavinių ryšys ir modeliavimo rezultatai

Vydūnas ŠALTENIS (MII)

el. paštas: saltenis@ktl.mii.lt

1. Įvadas

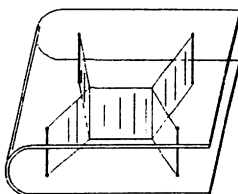
Dar praeitame šimtmetyje J.A.F. Plateau, eksperimentuodamas su muilo plėvelėmis, atkreipė dėmesį į dėsningumus, kurie leido teigti, kad plėvelės minimizuoja savo paviršiaus plotą. R. Courant ir H. Robbins [3] išpopuliarino „matematinų ekstremalių problemų eksperimentinio sprendimo“ idėją. Jie rėmėsi idealizuotų plėvelių, esant sudėtingiems apribojimams, savybėmis. Vienas jų pavyzdžių – vaizdi trumpiausio taškų jungimo plokštumoje (Šteinerio) uždavinio sprendimo idėja, kuri keturių fiksuotų taškų atveju iliustruojama 1 pav.

Čia du lygiagretūs paviršiai sujungti strypais, kurių padėtis atitinka jungiamų taškų koordinatėms. Panardinus sistemą į muilo tirpalą ir ją ištraukus plėvelė sudaro struktūrą iš vertikalių juostų, jungiančių strypus. Kadangi plėvelės plotas minimalus, o jos briaunos statmenos paviršiams, plėvelės projekcijų į horizontalią plokštumą bendras ilgis taip pat minimalus.

2. Šteinerio uždavinys

Šteinerio uždavinyje ieškoma trumpiausio tinklo, jungiančio n fiksuotų taškų plokštumoje, leidžiant įvesti norimą papildomų taškų (Šteinerio taškų) skaičių. Tegul T – minimalus tinklas iš viršūnių ir briaunų, jungiančių taškus, o $G(T)$ – tinklo T grafas. Tinklas T turi tenkinti savybes [5]:

- visos briaunos yra tiesių atkarpos;
- $G(T)$ yra medis;



1 pav. Šteinerio uždavinio eksperimentinio sprendimo idėjos iliustracija.

- kampai tarp bet kurių dviejų briaunų ties viršūnėmis lygūs mažiausiai 120° ;
- viršūnių, atitinkančių Šteinerio taškams, laipsnis lygus 3, o kampai tarp briaunų ties Šteinerio taškais lygūs tiksliai 120° ;
- didžiausias Šteinerio taškų skaičius lygus $n - 2$.

Šių savybių nepakanka, kad tinklas būtų globaliai optimalus. Paprastai šias savybes tenkina daug skirtingo ilgio tinklo konfigūracijų. Pavyzdžiui, 1 pav. vaizdą pasukus 90° , gautume kitos leistinos konfigūracijos vaizdą. Augant fiksuotų taškų skaičiui n skirtingų konfigūracijų skaičius auga eksponentiškai; Euklidinis Šteinerio uždavinys yra kombinatorinis, NP sunkus [4].

3. Sausų ir drėgnų plėvelių modeliavimas

1 pav. iliustruoja minimalaus ilgio plėvelės variantą, vadinamą sausa plėvele [2]. Jų modeliavimas siekiant spręsti Šteinerio uždavinį netikslingas, nes galimos įvairios stabilios sausų plėvelių būklės.

Drėgnos plėvelės [2] nėra susiglaudę visu perimetru, o gali apgaubti tam tikrą skysčio kiekį. Drėgnos plėvelės, gaubiančios 20 fiksuotų taškų, pavyzdžius matome 2 pav. Tokia plėvelė minimizuoja savo ilgį, esant apribotam skysčio plotui.

Minimalaus ilgio drėgnos plėvelės kreivė gali susidėti tik iš tokių fragmentų [2]:

- vienodo spindulio R apskritimo lankų;
- tiesių fragmentų, kuriuose plėvelė dviguba (susiglaudusi).

2 pav. iliustruoja pagrindinę straipsnio idėją [6] apie idealizuotų drėgnų plėvelių evoliucionavimą į Šteinerio uždavinio sprendinį palaipsniui mažinant plėvelės ribojamą plotą. Ši iliustracija gauta naudojant specialiai sukurtą idealizuotų plėvelių modeliavimo programinę įrangą. Kreivės lankų centrų koordinatės randamos sprendžiant netiesinių lygčių sistemą, esant duotam lankų spinduliui R .

Pradinėje modeliavimo stadijoje lankų spindulio R reikšmės parenkamos ypač didelės (2a pav.), todėl tik dalis fiksuotų taškų, priklausančių iškilam apvalkalui, liečiasi prie minimalaus ilgio kreivės. Čia modeliuojama plėvelė turi tik vieną stabilią būklę, atitinkančią vienintelią kreivės ilgio minimumui.

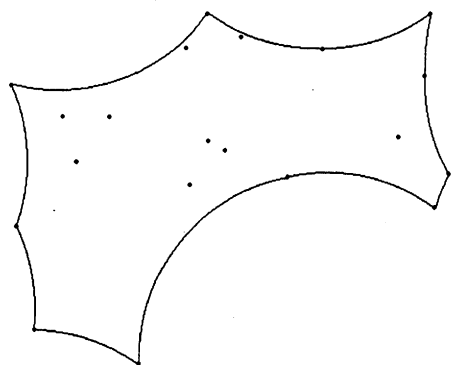
Su kiekvienu modeliavimo žingsniu spindulys R keičiamas palaipsniui mažinant ribojamą plotą, skaičiuojama nauja kreivės forma, pradiniam priartėjimui naudojant ankstesnio žingsnio sprendinį.

Po kiekvieno žingsnio tikrinama, ar neįvyko vienas iš įvykių:

- susilietę gretimi lankai ties fiksuotu tašku (žiūr. 2b pav. apatinį kampą);
- susilietę negretimi lankai (2c ir 2d pav.);
- kreivė palietė anksčiau kreivės neliestą fiksuotą tašką (2b ir 2c pav.).

Šiais atvejais atliekami atitinkami lygčių sistemos pakeitimai.

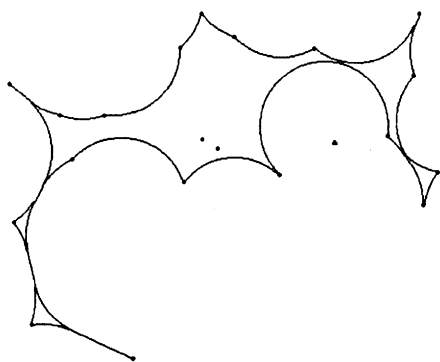
Modeliavimas baigiamas pakankamai sumažinus plėvelės ribojamą plotą, kai beveik visą kreivę sudaro tiesių fragmentai (2f pav.), o plėvelės forma praktiškai priartėja prie minimalaus Šteinerio tinklo formos.



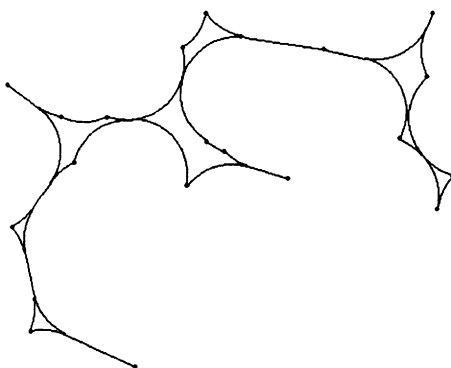
a)



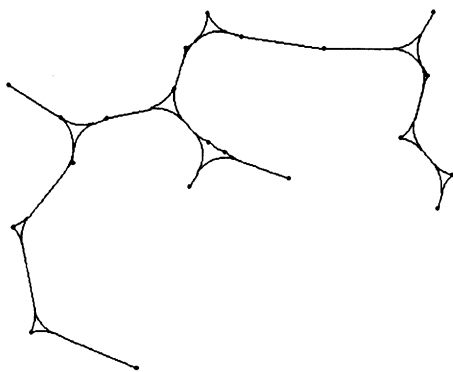
b)



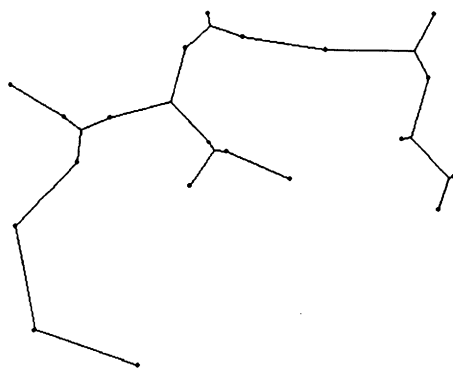
c)



d)



e)



f)

2pav. Plėvelės, gaubiančios 20 fiksuotų taškų, evoliucijos iliustracija.

Mažinant ribojamą plotą atsiranda ir daugiau stabilių plėvelės būklių (kreivės ilgio lokalių minimumų), į kurias nepakliūnama palaipsniui mažinant ribojamą plotą.

4. Lygčių sistema

Įveskime šiuos apibrėžimus kreivės elementams.

Jungiamus taškus vadinsime *fiksuotais taškais* P_i , $i = 1, \dots, n$.

Taškus, atitinkančius lankų galams, vadinsime *kampais* C_j , $j = 1, \dots, m$.

Jei kampo koordinatės sutampa su atitinkamo fiksuoto taško koordinatėmis, kampa vadinsime *drėgnu* (pavyzdžiui, 2a pav. visi kampai drėgni). Likusieji kampai yra *sausai* (pavyzdžiui, viršutinis dešinysis 2b pav. kampas).

Kiekvienas kampui C_j galime priskirti dviejų jį sudarančių lankų centrų O_{j1} ir O_{j2} . Taip pat kiekvienas kampas C_j turi savo bazę, kuria gali būti:

1. Fiksuotas taškas P_{jB} su tomis pačiomis koordinatėmis, kaip ir pats kampas drėgno kampo atveju.
2. Fiksuotas taškas P_{jB} , tiesės fragmentu besijungiantis su savo kampu (2b pav. apatinis fiksuotas taškas).
3. Kitas kampas C_{jB} , tiesės fragmentu besijungiantis su savo kampu (2b pav. matome du kampus su tokiomis bazėmis).

Tada duotam kreivės lankų spinduliui R turėsime tokio tipo lygčių sistemą.

1. Kiekvienam drėgnam kampui:

$$d(P_{jB}, O_{j1}) = R; \quad (1)$$

$$d(P_{jB}, O_{j2}) = R. \quad (2)$$

Čia ir toliau $d(A, B)$ – Euklidinis atstumas tarp taškų A ir B .

2. Kiekvienam sausam kampui, kurio bazė – fiksuotas taškas:

$$d(P_{jB}, O_{j1}) = d(P_{jB}, O_{j2}) \quad (3)$$

3. Kiekvienam sausam kampui, kurio bazė – kitas kampas:

$$d(C_{jB}, O_{j1}) = d(C_{jB}, O_{j2}). \quad (4)$$

Taip pat kiekvienam sausam kampui galioja lygtis:

$$d(O_{j1}, O_{j2}) = 2R. \quad (5)$$

Lygtyse (4) sausų kampų C_j koordinatės $x(C_j)$ ir $y(C_j)$ randamos iš dviejų kampui atitinkančių centrų O_{j1} ir O_{j2} koordinačių:

$$x(C_j) = (x(O_{j1}) + x(O_{j2}))/2;$$

$$y(C_j) = (y(O_{j1}) + y(O_{j2}))/2.$$

Lygčių sistemos (1–5) kintamieji – centrų koordinatės $x(O_j)$ ir $y(O_j)$. Sistemos sprendimas duotam spinduliui R greičiausio nusileidimo metodu nekelia žymesnių skaičiuojamųjų sunkumų esant pakankamai geram pradiniam sprendinių priartėjimui.

5. Plėvelių evoliucijos modeliavimo skaičiuojamieji aspektai

Pagrindiniu sunkumu, kylančiu modeliuojant plėvelių evoliuciją, laikytinos „mirties taškų“ situacijos. Jose, palaipsniui sumažinus spindulį R žemiai kritinės reikšmės R_c , neįmanoma rasti lygčių sistemos sprendinių, naudojant pradiniam priartėjimui ankstesnio žingsnio rezultatus.

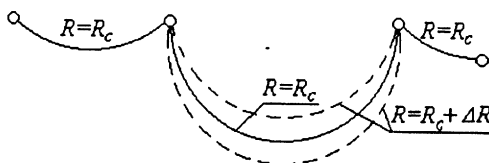
3 pav. iliustruoja plėvelės fragmentą, kuriame tokia situacija susiformavo. Čia tolimesnė evoliucija įmanoma ne mažinant, o didinant spindulį R .

Plačiau šių situacijų prigimtis analizuojama [2] ir [7].

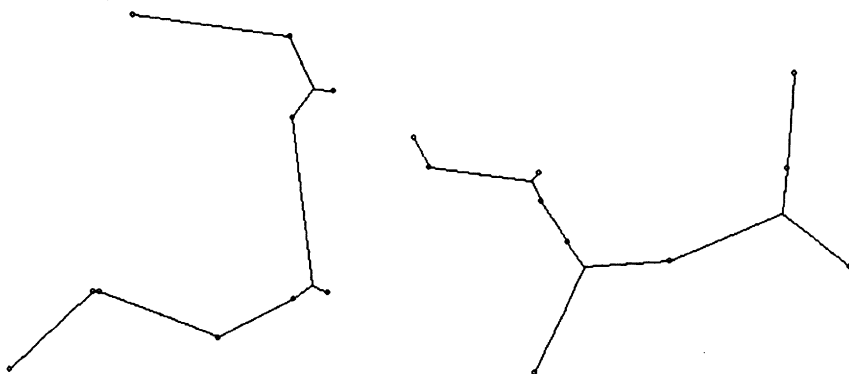
6. Algoritmo testavimas

Testuojant plėvelių evoliucijos algoritmą spręsta penki uždaviniai iš tiksliai išspręstų uždavinių bibliotekos ($n = 10$); visų sprendiniai buvo tikslūs. Dviejų iš jų tikslūs sprendiniai iliustruojami 4 pav.

Standartiniai testiniai uždaviniai Šteinerio uždavinio sprendimo algoritmams išbandyti galima rasti [1] (taip pat interneto adresu <http://mscmga.ms.ic.ac.uk/>



3 pav. Plėvelės fragmentas, iliustruojantis „mirties taško“ situaciją.



4 pav. Testinių uždavinių sprendiniai.

jeb/orlib/esteininfo.html). Ten pat pateikti tikslūs šių uždavinių sprendiniai, gauti atlikus didžiulės apimties skaičiavimus racionaliai generuojant visas galimas Šteinerio tinklo konfigūracijas ir lyginant jų ilgius [8].

Kol kas nepavyko rasti kontrpavyzdžių, kurių sprendimas naudojant straipsnyje aprašytą algoritmą duotų neoptimalų tinklą.

7. Išvados

Ryšio tarp idealizuotų plėvelių evoliucijos ir trumpiausio taškų jungimo plokštumoje egzistavimas teikia galimybes naujų, netradicinių sprendimo algoritmų konstravimui. Analogiškai galėtume konstruoti algoritmus ir kitų kombinatorinių uždavinių plokštumoje, pavyzdžiui, keliaujančio prekeivio, uždavinių sprendimui.

Žinoma, toks sprendimo būdas kelia daug klausimų. Neaišku, ar ypač didelės apimties uždaviniuose modeliavimo paklaidos nesukels esminio sprendinių nestabilumo. Būtinai tolesni tyrimai įveikiant mirties taško situacijas šlapių plėvelių modelyje bei skaičiavimų apimties priklausomybė nuo fiksuotų taškų skaičiaus.

Literatūra

- [1] J.E. Beasley, A heuristic for Euclidean and rectilinear Steiner problems, *European Journal of Operational Research*, **58**, 284–292 (1992).
- [2] K. Brakke, F. Morgan, Instability of the wet X soap film, Preprint www.susqu.edu/facstaff/b/brakke/papers/wetx.ps, 1–23 (1997).
- [3] R. Courant, H. Robbins, *What is Mathematics?* Oxford University Press, London, NY, Toronto (1941).
- [4] M.R. Garey, R.L. Graham, D.S. Johnson, The complexity of computing Steiner minimal trees, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **32**, 835–859 (1977).
- [5] E.N. Gilbert, H.O. Pollak, Steiner minimal trees, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **16**, 1–29 (1966).
- [6] V. Šaltenis, Simulation of wet film evolution and the Euclidean Steiner problem, *Informatica*, **10**(4), 457–466 (1999).
- [7] V. Šaltenis, Investigation of dead-point situations in the simulation of wet film evolution, *Informatica*, **11**(4), 469–478 (2000).
- [8] P. Winter and M. Zachariasen, Euclidean Steiner minimum trees: an improved exact algorithm, *Networks*, **30**, 149–166 (1997).

Models of idealized films and optimal networks relations between the problems and simulation results

V. Šaltenis

Simulation of idealized films under complex constraints is an instrument of investigating length-minimizing curves. If we select the proper evolution of the curves, their shapes may approach to the solution of some combinatorial problems.

The simulation of wet films was used in algorithms and software for solving the Steiner problem. The results of the computational experiments are presented.