Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 184–188

Задача Коши для вырождающегося эллиптического уравнения

Дайва КОРСАКЕНЕ (ŠU)
e-mail: mokslo.sk@cr.su.lt

1. Введение

В теории уравнений с частными производными имеется ряд эффектов, которые не имеют аналогий в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Примером таких явлений может служить полурегулярное вырождение [2]. Как показал А. Янушаускас [2], решения уравнения

$$z^2\left[u_{zz}+\sum_{k,l=1}^{m}A_{kl}(X)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_l}\right]+zB(z,X)u_z+C(z,X)u=0, \tag{1}$$

$X=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$, имеют следующую структуру:

$$u=z^{\rho_1(X)}g(z,z\ln z,X)+z^{\rho_2(X)}h(z,z\ln z,X),$$

где $g(z,s,X)$ и $h(z,s,X)$ – голоморфные в окрестности начала координат функции, а ρ_1 и ρ_2 – корни уравнения

$$\rho(\rho-1)+B(0,X)\rho+C(0,X)=0.$$

Здесь возникают большие затруднения при доказательстве сходимости рядов, представляющих функции g и h. Сходимость доказана лишь в отдельных частных случаях.

2. Постановка и решение задачи

В данной работе рассмотрим в окрестности точки X гиперплоскости T_0: $\{z=0\}$ вырождающееся эллиптическое уравнение

$$z^2(u_{zz}+z^k\Delta u)+\mu z u_z+\lambda u=0, \tag{2}$$

где $u=u(z,x,y)$, $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$, k – целое положительное число, μ и λ – вещественные постоянные.

В уравнение (2) введем новые переменные $\xi = x + iy$, $\eta = x - iy$:

$$z^2(u_{zz} + 4z^k u_{\xi\eta}) + \mu z u_z + \lambda u = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим окрестность V_1: $\{|\xi| < R,\ |\eta| < R,\ |z| < r\}$ начала координат и плоскость $\{z = z_0\}$, $|z_0| < r$, пересечением которых является бицилиндр V: $\{|\xi| < R,\ |\eta| < R\}$. Как известно [3], всякую голоморфную в бицилиндре V функцию можно аппроксимировать функциями, голоморфными в более широком бицилиндре D: $\{|\xi| \leqslant \rho,\ |\eta| \leqslant \rho,\ \rho > R\}$. Любую функцию $f(\xi, \eta)$, голоморфную в замкнутом бицилиндре D с остовом границы Γ, можно представить интегральной формулой Коши:

$$f(\xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t, \tau)}{(t - \xi)(\tau - \eta)} \mathrm{d}t\mathrm{d}\tau.$$

Из этого представления следует, что для того, чтобы изучить задачу Коши для уравнения (3) с данными голоморфными в D, достаточно рассмотреть задачу Коши с данными

$$u|_{z=z_0} = \frac{1}{(t - \xi)(\tau - \eta)}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=z_0} = \frac{1}{(t - \xi)(\tau - \eta)}, \tag{4}$$

где точка (t, τ) пробегает остов границы Γ бицилиндра D.

Решение этой задачи будем искать в виде ряда

$$u(z, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(z)}{(t - \xi)^i (\tau - \eta)^i}. \tag{5}$$

Подставляя (5) и его производные в уравнение (3) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем рекуррентную систему уравнений для определения функций $\varphi_i(z)$:

$$z^2 \varphi_i'' + \mu z \varphi_i' + \lambda \varphi_i = -4(i-1)^2 z^{k+2} \varphi_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Из начального условия (4) следует, что

$$\varphi_1(z_0) = \varphi_1'(z_0) = 1, \quad \varphi_i(z_0) = \varphi_i'(z_0) = 0, \quad i = 2, 3, \ldots. \tag{7}$$

Решая систему (6) с условиями (7), получим функции φ_i

$$\varphi_1(z) = \frac{\rho_2 - z_0}{\rho_2 - \rho_1}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\rho_1} + \frac{z_0 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\rho_2},$$

$$\varphi_i(z) = \frac{4(i-1)^2}{\rho_2 - \rho_1} \int\limits_{z_0}^{z} \left[\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\rho_1} - \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\rho_2}\right] \zeta^{k+3} \varphi_{i-1}(\zeta) \mathrm{d}\zeta, \tag{8}$$

где ρ_1 и ρ_2 – корни уравнения

$$\rho(\rho-1)+\mu\rho+\lambda=0,$$

причем μ и λ таковы, что разность корней этого уравнения не является целым числом.

Для оценки функций $\varphi_i(z)$ положим, что z_0 – вещественное, положительное число и $\operatorname{Re}\rho_1 < \operatorname{Re}\rho_1 < -1$. Заметим, что последнее условие не ограничивает общности, так как заменой $v = z^{-l}u$ в уравнении (2) при подходящем выборе натурального числа l всегда можно добиться выполнения этого условия.

Обозначим

$$h_i(z,\zeta) = \left(1-\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\rho_1}\right)\cdot\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)^{-1}, \quad i=1,2,$$

$$N = \max\left\{\max_{|z|\leqslant r,|\zeta|\leqslant r}|h_1(z,\zeta)|, \quad \max_{|z|\leqslant r,|\zeta|\leqslant r}|h_2(z,\zeta)|\right\}.$$

Легко проверяется, что $h_i(z,\zeta)$ является ограниченными функциями переменных z и ζ.

Тогда формулу (8) перепишем так:

$$\varphi_i(z) = \frac{4(i-1)^2}{\rho_2-\rho_1}\int\limits_{z_0}^{z}\left(h_2(z,\zeta)-h_1(z,\zeta)\right)\zeta^{k+3}\frac{z-\zeta}{z}\varphi_{i-1}(\zeta)\mathrm{d}\zeta. \tag{9}$$

В плоскости с разрезом по вещественной отрицательной полуоси от нуля до ∞ можно выделить аналитические однозначные ветви функций, входящих в (9), таким образом интеграл в (9) не зависит от пути интегрирования. Его будем брать по отрезку луча $\arg\zeta = \arg z$. Обозначим $|z| = s$, $|\zeta| = t$, $\operatorname{Re}\rho_1 = p$ и используя оценки для аналогичных функций $\varphi_i(z)$ в [2], оценку при всех i.

$$|\varphi_i(z)| \leqslant M^i|z-z_0|^{2i}|z|^p,$$

где $M > 2r^{k+3}N|\rho_2-\rho_1|^{-1}$. Из этой оценки следует, что для точек (ξ,η) бицилиндра V ряд для $z^{-\rho_1}u$ в (5) сходится абсолютно и равномерно для всех z, удовлетворяющих неравенству

$$|z-z_0| < (\rho-R)\sqrt{\frac{|\rho_2-\rho_1|}{2r^{k+3}N}} = \delta. \tag{10}$$

Функция u из (5) будет определена в некоторой открытой окрестности начала координат, если $|z_0| < \frac{\delta}{2}$.

Прямым подсчетом получаем, что функции $\varphi_i(z)$ из (5) имеют вид

$$\varphi_i(z) = z^{\rho_1} g_i(z) + z^{\rho_2} h_i(z),$$

где g_i и h_i – голоморфные функции. Из этого представления и равномерной сходимости ряда для $z^{-\rho_1}u$ следует, что функция u имеет вид

$$u = z^{\rho_1} G(z, t-\xi, \tau-\eta) + z^{\rho_2} H(z, t-\xi, \tau-\eta), \tag{11}$$

где G и H – аналитические при $|\xi| < R$, $|\eta| < R$, $|z - z_0| < \delta$ функции переменных z, ξ и η.

Из оценки (10) для δ следует, что $\rho > R$ можно подобрать так, чтобы выполнялось неравенство $r \leqslant \frac{2}{3}\delta$. Выбирая $z_0 \leqslant \frac{\delta}{3}$, получим, что функция u определена всюду в окрестности начала координат. Поэтому, множество решений уравнения (3) вида

$$u(x,y,z) = z^{\rho_1} g_1(x,y,z) + z^{\rho_2} g_2(x,y,z), \tag{12}$$

где g_1 и g_2 – аналитические в окрестности точки X плоскости T_0: $\{z = 0\}$ функции, плотно в множестве всех решений уравнения (3), аналитических в всюду, за исключением, быть может, точек плоскости $z = 0$.

Функции $g_1(x,y,0)$ и $g_2(x,y,0)$ в (12) могут быть произвольными аналитическими функциями комплексных переменных x и y. В том случае, когда g_1 и g_2 голоморфные в некотором бицилиндре D решение уравнения (3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta,z) = &-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma} z^{\rho_1} F\left(1,1;\rho_1+\frac{\mu+k+1}{k+2};Z\right) f(t,\tau)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau}{(t-\xi)(\tau-\eta)} \\ &-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma} z^{\rho_2} F\left(1,1;\rho_2+\frac{\mu+k+1}{k+2};Z\right) g(t,\tau)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau}{(t-\xi)(\tau-\eta)}, \end{aligned}$$

где F – гипергеометрическая функция Гаусса, Γ – остов границы бицилиндра D и $Z = -\frac{4z^{k+2}}{(k+2)^2(t-\xi)(\tau-\eta)}$. Эта формула доказывается точно так же, как и в [1] формула

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta,z) = &-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma} F\left(1,1;\frac{k+1}{k+2};Z\right) f(t,\tau)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau}{(t-\xi)(\tau-\eta)} \\ &-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma} F\left(1,1;\frac{k+3}{k+2};Z\right) zg(t,\tau)\frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau}{(t-\xi)(\tau-\eta)} \end{aligned}$$

решения задачи Коши для уравнения

$$u_{zz} + z^k \Delta u = 0,$$

так как области регулярности гипергеометрических функций, входящих в эти формулы совпадают.

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Если разность $\rho_2 - \rho_1$ между корней уравнения*

$$\rho(\rho-1)+\mu\rho+\lambda=0$$

не является целым числом, то всякое решение уравнения (2), *аналитическое в некоторой области D всюду, кроме, быть может, точек гиперплоскости $z=0$, представимо в виде* (11), *где G и H аналитические всюду в области D функции.*

Литература

[1] Д.А. Корсакене, О задаче Коши для вырождающегося уравнения второго порядка, *Дифференциальные уравнения*, **33** (4), 560–562 (1997).
[2] А.И. Янушаускас, *Аналитическая теория эллиптических уравнений*, Наука, Новосибирск (1979).
[3] Б.А. Фукс, *Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных*, Наука, Москва (1985).

Išsigimusios elipsinės lygties Koši uždavinys

D. Korsakienė

Randamas lygties

$$z^2(u_{zz}+z^k\Delta u)+\mu z u_z+\lambda u=0$$

sprendinys, kai lygties

$$\rho(\rho-1)+\mu\rho+\lambda=0$$

sprendinių skirtumas nėra sveikasis skaičius.