Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 37–43

Parabolinio tipo II rūšies $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$-struktūros dualiųjų metrinių 4-mačių erdvių hiperpaviršiuose

Angelė BAŠKIENĖ (ŠU)
el. paštas: baskiene@fm.su.lt

Tarp afinorinių struktūrų gerai žinomos beveik dvigubos ir beveik kompleksinės struktūros, kurias lyginio matavimo daugdarose apibrėžia afinorius F, tenkinantis sąlygą $F^2 = \omega = \pm 1$.

Beveik kompleksinėse daugdarose ($\omega = -1$) galima nagrinėti Ermito ir Kelerio metrikas. Šių metrikų hiperbolinius analogus nesunkiai galima apibrėžti beveik dvigubose daugdarose ($\omega = 1$). Tuo tarpu beveik dualiosiose daugdarose, kurių struktūrinis afinorius F tenkina sąlygą $F^2 = 0$, parabolinius Ermito ir Kelerio metrikų analogus vienareikšmiškai apibrėžti negalima. Matematinėje literatūroje buvo mėginimų apibrėžti beveik dualiosiose daugdarose įvairias metrikas [2]. Šiame darbe bus nagrinėjama dualioji erdvė su tam tikra B-metrika. Tokios erdvės hiperpaviršiuose, normalizavus juos normaliniu vektoriumi, indukuojasi parabolinio tipo II rūšies metrinė $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$-struktūra [1]. Struktūros savybės priklauso nuo hiperpaviršiaus pobūdžio. Rastos diferencialinių lygčių sistemos funkcijos, apibrėžiančios hiperpaviršių, atžvilgiu, kurios reiškia būtinas ir pakankamas sąlygas, kad struktūra turėtų norimas savybes. Pateikta tokių struktūrų pavyzdžių.

Tarkime, jog turime dualiąją 4-matę erdvę $X_4(x^\alpha)$, $\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, 3, 4$, kurios struktūrinio tenzoriaus F matrica turi kanoninį pavidalą

$$(F^\beta_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Joje panagrinėkime nulinės signatūros B-metriką G, kurios matrica yra

$$(G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Šie tenzoriai tenkina sąlygas

$$F^\beta_\alpha F^\gamma_\beta = 0, \quad F^\gamma_\alpha G_{\gamma\beta} = F_{\alpha\beta} = F_{\beta\alpha}. \tag{3}$$

Hiperpaviršių $X_3 \subset X_4$ apibrėžkime lygtimi

$$x^4 = f(x^a), \quad a, b, \ldots = 1, 2, 3.$$

Jo liečiamieji vektoriai $\vec{B}_a$ turi koordinates $B_a^\alpha = \delta_a^\alpha + \delta_4^\alpha f_a$, čia $f_a = \frac{\partial f}{\partial x^a}$.

Hiperpaviršiaus normalinio neizotropinio ε-vienetinio vektoriaus $\vec{C}$ koordinatės C^α randamos iš sistemos $G_{\alpha\beta}B_a^\alpha C^\beta = 0$, $G_{\alpha\beta}C^\alpha C^\beta = \varepsilon = \pm 1$:

$$\vec{C}\{-f_3, 1, -f_1, -f_2\}/\sqrt{2|N|}, \quad N = f_1 f_3 - f_2 \neq 0, \quad \operatorname{sgn} N = \varepsilon. \tag{4}$$

Jei hiperpaviršių normalizuosime šiuo vektoriumi, jame indukuosis parabolinio tipo II rūšies $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$-struktūra [1], kurios komponentės $\phi_a^b, \xi^a, \eta_b, g_{ab}, \lambda$ gaunamos iš lygčių sistemos

$$F(\vec{B}_a) = \phi_a^b \vec{B}_b + \eta_a \vec{C}, \quad F(\vec{C}) = \xi^a \vec{B}_a + \lambda \vec{C}, \quad g_{ab} = G_{\alpha\beta} B_a^\alpha B_b^\beta :$$

$$\begin{gathered} (\phi_a^b) = \begin{pmatrix} \dfrac{-f_3^2}{2N} & \dfrac{f_3}{2N} & 1 - \dfrac{f_1 f_3}{2N} \\ \dfrac{f_3}{2N} & -\dfrac{1}{2N} & \dfrac{f_1}{2N} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\xi}\left\{f_3, -1, f_1 - \frac{f_3}{\lambda}\right\} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{2|N|}}, \quad \eta_a\left(\frac{-f_3}{\varepsilon\sqrt{2|N|}}, \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2|N|}}, 0\right), \quad \lambda = \frac{1 + f_3^2}{2N}, \\ (g_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & 1 \\ f_1 & 2f_2 & f_3 \\ 1 & f_3 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{5}$$

Šie tenzoriai tenkina struktūros aksiomas [1]:

$$\begin{gathered} \phi_a^b \phi_b^c = -\xi^c \eta_a, \quad \phi_a^b \xi^a = -\lambda \xi^b, \quad \phi_a^b \eta_b = -\lambda \eta_a, \quad \xi^a \eta_a = -\lambda^2, \\ g_{ab}\xi^b = \varepsilon \eta_a, \quad \phi_a^b g_{bc} = \phi_{ac} = \phi_{ca}. \end{gathered} \tag{6}$$

Iš (5) nesunku surasti tenzoriaus ϕ_{ab} matricą

$$(\phi_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

o iš Gauso lygčių – hiperpaviršiaus Rymano sieties ir asimptotinio tenzoriaus komponentes

$$\Gamma_{ab}^1 = \frac{f_3 f_{ab}}{2N}, \quad \Gamma_{ab}^2 = \frac{-f_{ab}}{2N}, \quad \Gamma_{ab}^3 = \frac{f_1 f_{ab}}{2N}, \quad h_{ab} = \frac{\varepsilon f_{ab}}{\sqrt{2|N|}}. \tag{8}$$

Pasinaudoję formulėmis (7), (8), (5), randame tenzoriaus ϕ_{ab} ir kovektoriaus η kovariantines išvestines metrikos g Rymano sieties atžvilgiu:

$$
\begin{aligned}
&\nabla_a\phi_{11} = -\tfrac{2f_{1a}f_3}{2N}, \quad \nabla_a\phi_{12} = \tfrac{f_{1a}-f_3f_{2a}}{2N}, \quad \nabla_a\phi_{13} = -\tfrac{f_3f_{3a}}{2N},\\
&\nabla_a\phi_{23} = \tfrac{f_{3a}}{2N}, \quad \nabla_a\phi_{22} = \tfrac{f_{2a}}{N}, \quad N = f_1f_3 - f_2;
\end{aligned} \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla_a\eta_1 = \tfrac{f_{a1}(1+f_3^2)-2Nf_{a3}+N_af_3}{\sqrt{2|N|}^3}, \quad \nabla_a\eta_2 = \tfrac{f_{a2}(1+f_3^2)-N_a}{\sqrt{2|N|}^3},\\
&\nabla_a\eta_3 = \tfrac{f_{a3}(1+f_3^2)}{\sqrt{2|N|}^3}, \quad N_a = \tfrac{\partial N}{\partial x^a}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Toliau randame

$$
\begin{aligned}
&\nabla_1\eta_2 - \nabla_2\eta_1 = \frac{-N_1 - f_3N_2 + 2Nf_{32}}{\sqrt{2|N|}^3},\\
&\nabla_1\eta_3 - \nabla_3\eta_1 = \frac{2Nf_{33} - N_3f_3}{\sqrt{2|N|}^3}, \quad \nabla_2\eta_3 - \nabla_3\eta_2 = \frac{N_3}{\sqrt{2|N|}^3};
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla_1\eta_2 + \nabla_2\eta_1 = \frac{2f_{12}(1+f_3^2) - N_1 + f_3N_2 - 2f_{32}}{\sqrt{2|N|}^3},\\
&\nabla_1\eta_3 + \nabla_3\eta_1 = \frac{2f_{13}(1+f_3^2) + f_3N_3 - 2Nf_{33}}{\sqrt{2|N|}^3},\\
&\nabla_2\eta_3 + \nabla_3\eta_2 = \frac{2f_{23}(1+f_3^2) - N_3}{\sqrt{2|N|}^3}.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Tarkime, $\nabla_a\eta_b + \nabla_b\eta_a = 0$. Tuomet iš (12) ir (10) gauname, jog $f_{ab} = 0$. Atvirkščiai, jeigu $f_{ab} = 0$, tada $\nabla_a\eta_b + \nabla_b\eta_a = 0$. Nesunku patikrinti, jog dėl (9) išraiškų $\nabla_a\phi_{bc} = 0$ tada ir tik tada, kai $f_{ab} = 0$. Analogiškai dėl (10) formulių reikalavimas $\nabla_a\eta_b = 0$ ekvivalentus lygybei $f_{ab} = 0$.

Teorema 1. *Parabolinio tipo $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$-struktūrai (5) metrinės dualiosios erdvės X_4 hiperpaviršiuje X_3 ekvivalentūs tokie teiginiai:*

1) *afinorius ϕ yra kovariantiškai pastovus metrikos g Rymano sieties atžvilgiu* $(\nabla_a\phi_b^c = \nabla_a\phi_{bc} = 0)$;
2) *vektorius η_b yra kovariantiškai pastovus* $(\nabla_a\xi^b = \nabla_a\eta_b = 0)$;
3) *vektorius ξ^a yra Kilingo vektorius* $(\nabla_a\eta_b + \nabla_b\eta_a = 0)$;
4) *hiperpaviršius yra hiperplokštuma* $(f_{ab} = 0)$.

Toliau tirsime $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$-struktūros (5) integruojamumą ir normalumą.
Iš (5), (8) randame afinoriaus ϕ Nijenhuis'o tenzoriaus

$$
N_{cb}^a = \phi_c^d\nabla_d\phi_b^a - \phi_b^d\nabla_d\phi_c^a - \phi_d^a\left(\nabla_c\phi_b^d - \nabla_b\phi_c^d\right)
$$

komponentes:

$$
\begin{aligned}
N^1_{13} &= -f_3 N^2_{13} = -\frac{f_3\left(f_3 N_3(1+f_3^2) - f_{33}N(1+2f_3^2)\right)}{4N^3},\\
N^3_{13} &= \frac{-f_3 N_3 P}{4N^3}, \qquad P = f_1 - f_1 f_3^2 + 2 f_2 f_3,\\
N^1_{23} &= -f_3 N^2_{23} = -\frac{f_3\left(f_3 N f_{33} - N_3(1+f_3^2)\right)}{4N^3},\\
N^3_{23} &= \frac{f_{33}N(2N - f_1 f_3) + N_3 P}{4N^3},\\
N^1_{12} &= \frac{-f_3(1+f_3^2)(N_1+f_3N_2)+f_{33}N(2N+f_1f_3)-2Nf_3N_3+2f_3^2N(f_{13}+f_3f_{32})}{4N^3},\\
N^2_{12} &= \frac{(1+f_3^2)(N_1+f_3N_2)+2NN_3-Nf_1f_{33}-2f_3N(f_{31}+f_3f_{32})}{4N^3},\\
N^1_{13} &= \frac{-P(N_1+f_3N_2)-2Nf_1N_3+f_1^2f_{33}+2f_1f_3N_{13}-2f_3N(2N-f_1f_3)f_{32}}{4N^3}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Afinorinė struktūra vadinama integruojama, jei $N^a_{cb} = 0$. Iš (13) gauname būtinas ir pakankamas $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$-struktūros (5) integruojamumo sąlygas:

$$
\begin{aligned}
&f_{33} = 0, \qquad N_3 = 0, \qquad N_1 + f_3 N_2 - 2 f_3 N f_{13} = 0,\\
&N = f_1 f_3 - f_2, \quad N_a = \frac{\partial N}{\partial x^a},
\end{aligned}
$$

arba

$$
\begin{aligned}
&f_{33} = 0, \qquad f_{13} f_3 - f_{23} = 0,\\
&f_3(f_{11} - f_{22}) + f_{12}(f_3^2 - 1) + f_{13}\left(f_1 + 2f_2f_3 - f_1 f_3^2\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Iš (11) išplaukia, jog būtinos ir pakankamos sąlygos, kad kovektorius η būtų gradientas, taip pat yra (14).

Parabolinio tipo $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$-struktūra vadinama normaliąja [1], jeigu

$$
\begin{aligned}
S^a_{cb} &= N^a_{cb} - \xi^a(\nabla_c\eta_b - \nabla_b\eta_c) = 0,\\
S_{cb} &= \phi^d_c(\nabla_d\eta_b - \nabla_b\eta_d) - \phi^d_b(\nabla_d\eta_c - \nabla_c\eta_d) + \nabla_c\lambda\eta_b - \nabla_b\lambda\eta_c = 0,\\
S^a_c &= \xi^d(\nabla_c\phi^a_d - \nabla_d\phi^a_c) + \phi^d_c\nabla_d\xi^a + \lambda\nabla_c\xi^a = 0,\\
S_c &= \xi^d(\nabla_c\eta_d - \nabla_d\eta_c) + \phi^d_c\nabla_d\lambda - \lambda\nabla_c\lambda = 0.
\end{aligned}
$$

Iš (13), (11), (5) randame tenzoriaus S^a_{cb} komponentes:

$$
S^1_{13} = -f_3 S^2_{13} = \frac{-f_3\left(f_3N_3(1+f_3^2) - 2f_3^2 N f_{33}\right)}{8N^3},
$$

$$S^3_{13} = \frac{-f_3PN_3 + 2Nf_3(2f_2 - f_1f_3)f_{33}}{8N^3} = -f_3S^3_{23},$$

$$S^1_{23} = -f_3S^2_{23} = \frac{-f_3\left(2f_3Nf_{33} - N_3(1 + f_3^2)\right)}{8N^3}.$$

Tarkime, jog $S^a_{cb} = 0$. Tuomet prilyginę nuliui apskaičiuotas tenzoriaus S^a_{cb} komponentes, gauname, jog $f_{33} = N_3 = 0$. Šių sąlygų ir pakanka, kad $S^a_{13} = S^a_{23} = 0$.

Jei $f_{33} = 0$, $N_3 = 0$, likusios tenzoriaus S^a_{cb} koordinatės turi paprastesnį pavidalą:

$$S^1_{12} = \frac{f_3(1 + f_3^2)(2f_3Nf_{13} - N_1 - f_3N_2)}{8N^3} = -f_3S^2_{12},$$

$$S^3_{12} = \frac{P(2f_3Nf_{13} - N_1 - f_3N_2)}{8N^3}.$$

Iš čia $S^a_{cb} = 0$ tada ir tik tada, kai išsipildo (14) sąlygos.

Kai $S^a_{cb} = 0$, po elementarių skaičiavimų iš (5), (11) gauname, jog $S^a_{cb} = S^a_c = S_c = 0$. Vadinasi, sąlyga $S^a_{cb} = 0$ būtina ir pakankama, kad $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$-struktūra (5) būtų normalioji.

Teorema 2. *Parabolinio tipo II rūšies $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$-struktūrai* (5) *dualiosios metrinės erdvės X_4 hiperpaviršiuje X_3 ekvivalentūs tokie teiginiai:*

1) *struktūra integruojamoji* ($N^a_{cb} = 0$);
2) *struktūra normalioji* ($S^a_{cb} = S_{cb} = S^a_c = S_c = 0$);
3) *kovektorius η - gradientas* ($\nabla_a\eta_b - \nabla_b\eta_a = 0$);
4) *hiperpaviršių X_3 apibrėžianti funkcija f randama iš (14) diferencialinių lygčių sistemos.*

Hipersfera $x^1x^3 + x^2x^4 = c$ ir hiperplokštuma $Ax^1 + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + E = 0$ tenkina šios teoremos sąlygas. Be minėtų hiperpaviršių teoremoje išvardintas savybes turi hipercilindrai $x^4 = u(x^1) + v(x^2)$. Čia c, A, B, C, D, E – pastovūs dydžiai, u, v – bet kurios vieno kintamojo funkcijos.

Ieškosime parakontaktinių, parasasakinių struktūrų [3, 4] parabolinių analogų. Iš (7), (9), (12) randame būtinas ir pakankamas sąlygas, kad $(\phi, \xi, \eta, \lambda)$-struktūra (5) būtų parabolinio tipo beveik parasasakinė struktūra, t.y., kad $\nabla_a\eta_b + \nabla_b\eta_a = 2\alpha\phi_{ab}$, $\alpha = \mathrm{const} \neq 0$:

$$f_3 = \mathrm{const}, \quad f_{11}(1+2f_3^2) - f_{22}(2+f_3^2) = 0, \quad f_{12}(1+2f_3^2) - f_3f_{22} = 0, \tag{15}$$

$$\alpha = \frac{f_{22}(2 + f_3^2) - f_3f_{12}}{\sqrt{2|N|}} = \mathrm{const} \neq 0.$$

Iš (11) formulių matome, jog tokias pat būtinas ir pakankamas sąlygas gauname prijungę reikalavimą, kad η_a būtų gradientas ($\nabla_a\eta_b - \nabla_b\eta_a = 0$). Vadinasi, jeigu struktūra yra parabolinio tipo beveik parasasakinė struktūra, tuomet $\nabla_a\eta_b = \alpha\phi_{ab}$, $\alpha = \mathrm{const} \neq 0$, t.y., ji yra parabolinė parasasakinė struktūra.

Iš čia išplaukia, jog paraboliniu atveju neegzistuoja beveik parasasakinių $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$-struktūrų (5), kurios nebūtų parasasakinėmis. Kadangi $\eta \wedge d\eta = -\frac{f_{33}}{2|N|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, šios struktūros nėra kontaktinės, nes $f_{33} = 0$. Tie faktai parabolinį atveją skiria nuo elipsinio bei hiperbolinio atvejų, kur beveik parasasakinės ir parasasakinės struktūros yra būtinai kontaktinės.

Kadangi iš (15) išplaukia (14) formulės, parabolinė parasasakinė struktūra yra normalioji, integruojamoji, be to, jos 1-forma $\eta = \eta_a dx^a$ yra uždara.

Panagrinėkime hiperpaviršių $X_3 \subset X_4$, kurio asimptotinis tenzorius tenkina sąlygą

$$h_{ab} = \beta g_{ab} + \mu \eta_a \eta_b, \quad \beta = \text{const}, \quad \mu - \text{bet kuri funkcija}. \tag{16}$$

Tarp tokių paviršių yra hipersfera ($\mu = 0$, $\beta = \text{const} \neq 0$), hiperplokštuma ($\mu = \beta = 0$).

Iš (8), (5) nesunku rasti būtinas ir pakankamas sąlygas, kad hiperpaviršiui galiotų (16) lygybė:

$$\begin{aligned} &f_{33} = 0, \quad f_{23} = f_3 f_{13}, \quad f_{11} = f_3^2(f_{22} - 2f_2 f_{13}), \\ &f_{12} = f_1 f_{13} - f_3(f_{22} - 2f_2 f_{13}), \\ &\beta = \frac{\varepsilon f_{13}}{\sqrt{2|N|}} = \text{const}, \quad \mu = \varepsilon(f_{22} - 2f_2 f_{13})\sqrt{2|N|}, \quad N = f_1 f_3 - f_2. \end{aligned} \tag{17}$$

Iš (17) matome, jog hiperpaviršiuje, kurio asimptotinis tenzorius tenkina (16) lygybę, 1-forma η nėra kontaktinė, todėl kai $\beta \neq 0$, $\mu \neq 0$, hiperpaviršius (16) vadintinas beveik parakontaktiniu umbiliniu hiperpaviršiumi.

Kadangi iš (15) lygčių išplaukia, jog (17) formulėse $\beta = \frac{\varepsilon f_{13}}{\sqrt{2|N|}} = 0$, hiperpaviršius $X_3 \subset X_4$ su parabolinio tipo parasasakine struktūra negali būti beveik parakontaktinis umbilinis hiperpaviršius.

Kai $\beta = 0$, iš (17) lygčių randame būtinas ir pakankamas sąlygas, kad hiperpaviršiaus X_3 asimptotinis tenzorius tenkintų sąlygą $h_{ab} = \mu \eta_a \eta_b$:

$$f_3 = \text{const}, \quad f_1 + f_2 f_3 = d = \text{const}.$$

Išsprendę šią diferencialinių lygčių sistemą, gauname visus hiperpaviršius, kurių asimptotinis tenzorius tenkina (16) lygybę, o $\beta = 0$:

$$x^4 = cx^3 + D(x^1, x^2).$$

Čia $c = \text{const}$, D randama iš lygties $\Psi(D - d \cdot x^1, cD - d \cdot x^2) = 0$, o Ψ – bet kuri dviejų kintamųjų funkcija.

Literatūra

[1] A. Baškienė, Beveik kontaktinių struktūrų paraboliniai analogai, *Liet. matem. rink., spec. nr.*, **41**, 233–238 (2001).

[2] Н.Талантова, А.Широков, Замечание об одной метрике в касательном расслоении, *Изв. вузов, Математика*, **6** (157), 143–146 (1975).
[3] S. Sasaki, On paracontact Riemannian manifolds, *TRU Math.*, **60**, 75–86 (1980).
[4] I. Sato, On a structure similar to the almost contact structure, I, *Tensor*, **30** (3), 219–224 (1976).

Parabolic $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$-structures of second kind on hypersurfaces of dual metric 4-dimensional spaces

A. Baškienė

Parabolic metric $(\phi, \xi, \eta, g, \lambda)$-structures of second kind on hypersurfaces of 4-dimensional dual metric space and its properties are investigated. Some examples of normal, integrable parabolic metric structures of second kind are given.