Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 640–642

Paskirstyto valdymo diskrečiųjų sistemų būtinos ypatingojo valdymo optimalumo sąlygos

Nijolė JANUŠAUSKAITĖ (KTU)
el. paštas: nijole.janusauskaite@ktu.lt

Diskretusis maksimumo principas yra vienas iš pagrindinių metodų, kurie taikomi diskrečiųjų sistemų optimaliojo valdymo tyrimui. Tačiau ypatingojo valdymo atveju maksimumo principas išsigimsta ir neteikia pilnos informacijos apie valdomą objektą. Darbo tikslas – gauti būtinas ypatingojo valdymo aukštesnės eilės optimalumo sąlygas. Tirdami ypatingąjį valdymą, taikysime valdymo variacijos ir funkcionalo pokyčio metodus.

Uždavinio formuluotė. Tarkime, kad $\mathrm{U} \subset \mathrm{R}^m$ – aprėžtoji Borelio aibė. Atkarpomis tolydžią funkciją u: $[t_0; t_1] \to \mathrm{U}$, vadinsime leistinu valdymu. Visų leistinų valdymų aibę pažymėsime U. Tarkime, kad $f = f(x, u, \sigma)$: $\mathrm{R}^n \times \mathrm{U} \times [t_0; t_1] \to \mathrm{R}$ – aprėžtoji, mačioji, tolydi x ir atkarpomis tolydi σ atžvilgiu, kartu su savo dalinėmis išvestinėmis $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n$ funkcija.

Sakykime, duota paskirstyto valdymo diskrečioji sistema

$$x(t+1) = \int_t^{t+1} f(x(t), u(\sigma), \sigma)\,\mathrm{d}\sigma, \quad t \in \{t_0, t_0+1, \ldots, t_1-1\} = T, \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t) \equiv 0, \quad t < t_0. \tag{2}$$

Aibėje U spręsime funkcionalo minimizavimo uždavinį

$$I(u) = \varphi\left(x(t_1), x(t_1-1), \ldots, x(t_1-h)\right); \tag{3}$$

čia $\varphi(x, x^{(1)}, \ldots, x^{(h)})$ – skaliarinė tolydi savo kintamųjų atžvilgiu, kartu su savo dalinėmis išvestinėmis $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^{(j)}}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i x_j}$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, h$, funkcija; h – sveikas, teigiamas skaičius.

Valdymą u^0 vadinsime optimaliuoju (1)–(3) uždavinio valdymu, jei

$$J(u^0) = \min_{u \in U} J(u),$$

o optimalųjį valdymą atitinkančią (1)–(2) trajektoriją $x^0(t)$, $t \in T \cup t_1 = T^*$, vadinsime optimaliąja.

(1)–(3) uždavinio būtinas optimaliojo valdymo sąlygas apibūdina tokia teorema.

1 teorema. *Optimalusis* (1)–(3) *uždavinio valdymas* $u^0(\sigma)$, $\sigma \in [t; t+1)$, $t \in T$ *ir optimalioji trajektorija* $x^0(t)$, $t \in T^*$ *tenkina maksimumo sąlygą*

$$H\left(x^0(t), \psi^0(t), u^0(\sigma), \sigma\right) = \max_{u \in U} H\left(x^0(t), \psi^0(t), u, \sigma\right), \ \forall \sigma \in [t; t+1), \ t \in T, \tag{4}$$

čia $H(x(t), \psi(t), u(\sigma), \sigma) = \psi^T(t) f(x(t), u(\sigma), \sigma)$ *– Hamiltono funkcija.*

Jungtiniai kintamieji $\psi(t)$ *tinka lygčių sistemai*

$$\begin{aligned}\psi(t-1) = {} & \int_t^{t+1} \frac{\partial H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(\sigma), \sigma)}{\partial x}\, \mathrm{d}\tau \\ & -\psi(t+h-1, -h) + \psi(t, -1), \quad t \in T,\end{aligned}$$

kai kraštinės sąlygos nusakomos sąryšiais:

$$\begin{aligned}\psi(t_1 - 1) &= -\frac{\partial \varphi(x^0(t_1), x^0(t_1-1), \ldots, x^0(t_1-h))}{\partial x}, \\ \psi(t_1 - 1, s) &= -\frac{\partial \varphi(x^0(t_1), x^0(t_1+1), \ldots, x^0(t_1-h))}{\partial x^s}, \quad s = -h, \ldots, -1.\end{aligned}$$

Teoremos įrodymas yra analogiškas autorės [1] darbe išnagrinėtai schemai.

APIBRĖŽIMAS. Valdymą $u^0(\sigma)$ vadinsime ypatinguoju atkarpoje $t \in \tau \subset [t_0; t_1]$, jei egzistuoja poaibis $\Omega(u(\sigma), \sigma) \subset U$, $(\Omega \neq U)$, kuriam teisinga lygybė

$$H\left(x^0(t), \psi^0(t), u(\sigma), \sigma\right) \equiv H\left(x^0(t), \psi^0(t), u^0(\sigma), \sigma\right), \quad t \in \tau, u \in \Omega. \tag{5}$$

Toliau suformuluosime būtinas sąlygas, su kuriomis (1)–(3) uždavinio valdymas yra ypatingasis.

2 teorema. *Jei* (1)–(3) *uždavinio valdymas* $u \in \Omega$ *yra ypatingasis atkarpoje* τ, *tai*:

1) *valdymas* u^0 *tenkina* (4) *maksimumo sąlygą aibėje* $T \backslash \tau$;

2) $(f(x^0(t), u, \sigma) - f(x^0(t), u^0(\sigma), \sigma)^T \eta^0(t)(f(x^0(t), u, \sigma) - f(x^0(t), u^0(\sigma), \sigma)) \leqslant 0$, $\forall u \in \Omega$, $\forall \sigma \in \tau$;

čia $\eta^0(t)$ *–* $n \times n$ *matricinė funkcija, kuri tinka lygčiai*

$$\begin{aligned}\eta^0(t-1) = {} & \int_t^{t+1} \frac{\partial^2 H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(\sigma), \sigma)}{\partial x^2}\, \mathrm{d}\sigma \\ & + \left(\int_t^{t+1} \frac{\partial f(x^0(t), u^0(\sigma), \sigma)}{\partial x}\right)^T \\ & \times \eta^0(t) \left(\int_t^{t+1} \frac{\partial f(x^0(t), u^0(\sigma), \sigma)}{\partial x}\right) \mathrm{d}\sigma, \quad \forall t \in T.\end{aligned}$$

su kraštinėmis sąlygomis

$$\begin{aligned}\eta^0(t_1 - 1) &= -\frac{\partial^2 \varphi(x^0(t_1), x^0(t_1-1), \ldots, x^0(t_1-h))}{\partial x^2}, \\ \eta^0(t_1 - 1, s) &= -\frac{\partial^2 \varphi(x^0(t_1), x^0(t_1-1), \ldots, x^0(t_1-h))}{\partial x^s}, \quad s = -h, \ldots, -1.\end{aligned}$$

Norėdami įrodyti teoremą, (3) funkcionalui taikome baigtinių pokyčių metodą bei valdymo adatinę variaciją. Pastebėsime, kad ypatingojo valdymo problemos dažnai sutinkamos realiųjų procesų optimizavimo uždaviniuose. Buvo nustatyta, kad ypatingi valdymai sutinkami metalurgijoje, ekonomikoje ir t.t.

Literatūra

[1] N. Janušauskaitė, Diskretusis maksimumo principas Balco tipo uždaviniui su paskirstytu valdymu, *Liet. matem. rink.*, **36**(1), 21–26 (1996).
[2] N. Janušauskaitė, Diskrečiojo apibendrintojo Mayerio funkcionalo antrosios variacijos problema, *Liet. matem. rink.*, **2**(spec. nr.), 433–437 (1998).

Necessary optimal conditions for singular control in the discrete systems with distributed control

N. Janušauskaitė

Necessary conditions for singular control of the Mayer form's functional in the discrete systems with distributed control are obtained.