

Voronoi diagramų tyrimas ir taikymas

Petras RUPŠYS (LŽŪU)
el. paštas: rpetras@tech.lzua.lt

Įvadas

Daugelyje egzistuojančių situacijų biologijoje, ekologijoje, miškų ūkyje ir kitose mokslo srityse turime baigtinį skaičių objektų n , tam tikra tvarka išsidėsčiusių plokštumoje R^2 arba daugiamatėje erdvėje R^m ($m > 2$). Objektų padėties koordinačių išsidėstymas gali būti sistemingas arba nesistemingas. Nesistemingo taškų išsidėstymo plokštumoje pavyzdžiu gali būti medžių išsidėstymas medyne, pateiktas 1 b) pav.

Voronoi diagrama kiekvienam duotajam taškui p^i ($i = 1, 2, \dots, n$) apibrėžia „teritoriją“, kuri yra artimesnė šiam taškui, negu bet kuriam kitam duotajam taškui. Voronoi diagramų taikymo miškų ūkio problemų tyrime pradininku reikia laikyti Brown [1]. Autorius kiekvienam medžiui medyne apibrėžia potencialią maitinimosi (egzistencijos) sritį daugiakampio pavidalu. Voronoi diagramų tyrimo ir taikymo istorinė medžiaga pateikta Okabe, Boots, Sugihara monografijoje [2].

Toliau pateiksime algoritmą Voronoi diagramos plokštumoje sudarymui, nagrinėsime jo efektyvumą ir taikysime ją tirdami sąveiką tarp individualių medyno medžių.

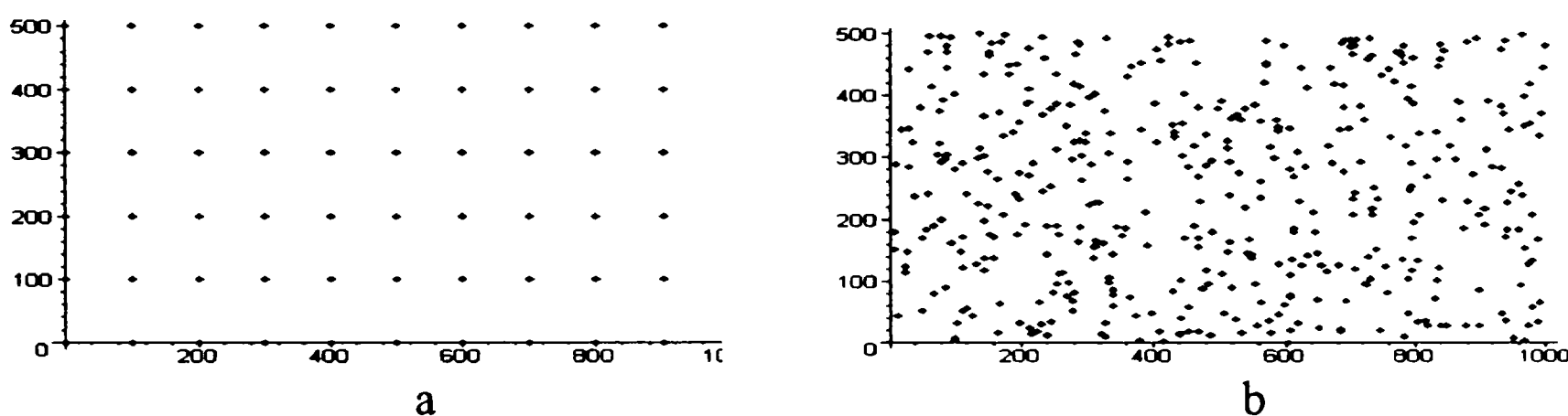
Tyrimo medžiaga ir metodai

Tarkime, kad plokštumoje R^2 turime baigtinį skaičių n taškų p^i ($i = 1, 2, \dots, n$) (generatorių). Atstumą tarp dviejų plokštumos taškų x, y pažymime taip: $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Tarkime, kad generatorių aibė P apibrėžiama taip:

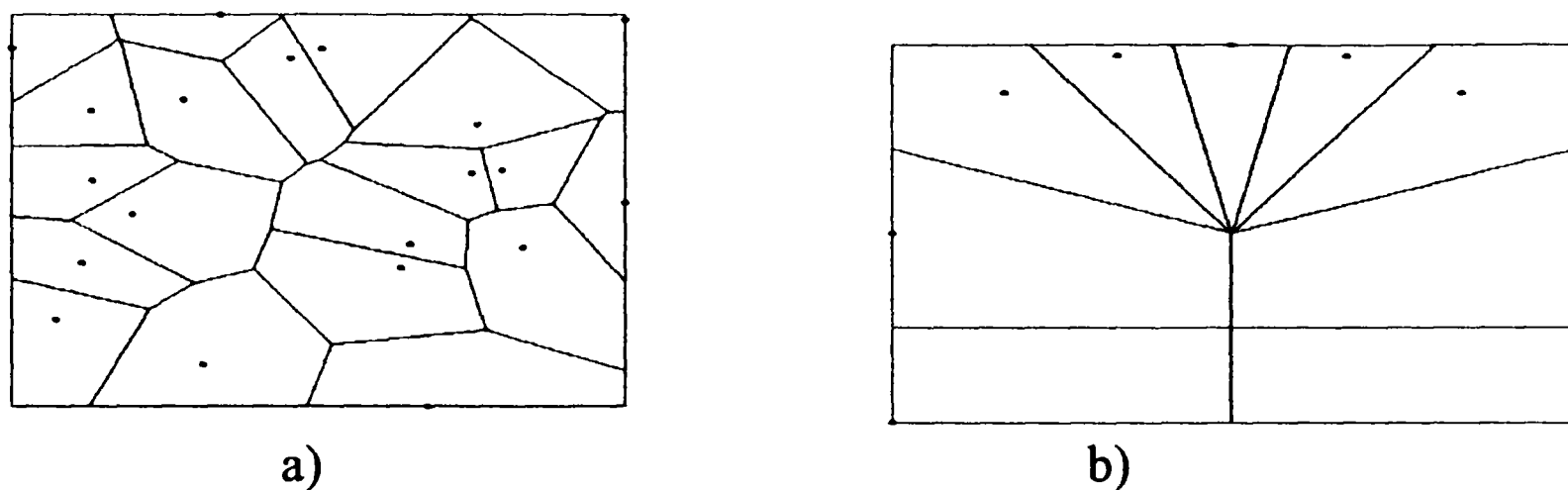
$$P = \{p^1, p^2, \dots, p^n \mid p^i \in R^2, i \in I_n, I_n = \{1, 2, \dots, n\}, p^i \neq p^j, i \neq j, i, j \in I_n\}.$$

Kiekvienam duotajam taškui p^i Voronoi daugiakampį $V(p^i)$ apibrėžiame taip:

$$V(p^i) = \{p \in R^2 \mid \|p - p^i\| \leq \|p - p^j\| \quad \forall j \neq i, i, j \in I_n\}.$$



1 pav. Taškų išsidėstymas plokštumoje: a) sistemingas, b) nesistemingas.



2 pav. Voronoi diagramos: a) neišsigimusi, b) išsigimusi.

Voronoi daugiakampio apibrėžimui galima naudoti pusplokštumes $H(p^i, p^j)$, būtent:

$$V(p^i) = \bigcap_{j \in I_n \setminus \{i\}} H(p^i, p^j),$$

$$H(p^i, p^j) = \{p \in R^2 \mid \|p - p^i\| \leq \|p - p^j\| \quad \forall j \neq i, \quad i, j \in I_n\}.$$

Voronoi diagrama laikome aibę $V = \{V(p^1), V(p^2), \dots, V(p^n)\}$, sudarytą iš Voronoi daugiakampių. Praktiniuose taikymuose tikslinga laikyti, kad generatoriai p^i ($i = 1, 2, \dots, n$) yra išsidėstę aprėžtoje srityje S . Todėl Voronoi daugiakampiu laikome $V(p^i) \cap S$, o Voronoi diagrama laikome aibę $V \cap S$. Voronoi diagramą vadiname išsigimusia, jeigu iš vienos viršūnės išeina daugiau kaip trys briaunos. Voronoi diagrama pateikta 2 a) paveiksle yra neišsigimusi, o pateikta 2 b) – išsigimusi.

Voronoi diagramos išsigimimo sąlyga yra ekvivalentiška sąlygai, jog egzistuoja nemažiau kaip 4 generatoriai kurie gali būti sujungti apskritimu. Voronoi diagramą formuosime palaipsniui įvesdami po vieną naują plokštumos tašką (generatorių). Voronoi diagramos plokštumoje sudarymo algoritmą apibrėžiame taip:

1 žingsnis. Generatoriui p^i Voronoi poligoną apibrėžiame tokiu stačiakampiu:

$$\left(\min_{1 \leq k \leq n} x_k; \min_{1 \leq k \leq n} y_k \right), \quad \left(\max_{1 \leq k \leq n} x_k; \min_{1 \leq k \leq n} y_k \right),$$

$$\left(\max_{1 \leq k \leq n} x_k; \max_{1 \leq k \leq n} y_k \right), \quad \left(\min_{1 \leq k \leq n} x_k; \max_{1 \leq k \leq n} y_k \right).$$

2 žingsnis. Įvedame naują generatorių p^j ir tikriname kuriam iš Voronoi daugiakampių $V(p^i)$ priklauso šis plokštumos taškas. Per atkarpos, jungiančios taškus p^i, p^j , vidurio tašką brėžiame statmenį. Šis statmuo kerta daugiakampio $V(p^i)$ briaunas dviejuose taškuose. Daugiakampio $V(p^j)$ auginimo procesą tęsiame kirtimosi su daugiakampio $V(p^j)$ briaunomis taškuose. Procesas tęsiamas iki laužtė užsidarys.

3 žingsnis. Jeigu $j + 1 > n$, tada Voronoi diagramos formavimas baigtas, priešingu atveju grįžtame į 2 žingsnį.

Reikia pastebėti, kad šis Voronoi daugiakampių auginimo metodas reikalauja aritmetinius skaičiavimus atlikti tiksliai be jokių aritmetinio apvalinimo paklaidų. Tai pasiekti MAPLE aplinkoje nėra sudėtinga [3], [4], nes generatorių koordinatės galima transformuoti į sveikaskaitinius dydžius.

Algoritmo efektyvumą įvertinsime analizuodami sugaišto laiko $T(n)$ priklausomybę nuo generatorių skaičiaus n . Voronoi diagramos generatorius P simuliuojame Monte Karlo metodu. Algoritmo efektyvumo eilę γ apibrėžiame taip: egzistuoja konstanta C tokia, kad

$$T(n) \leq Cn^\gamma. \quad (1)$$

Natūralu tvirtinti, kad algoritmas yra efektyvesnis, kada eilė γ yra mažesnė. Išlogaritmavę (1), gauname tiesinės regresijos lygtį

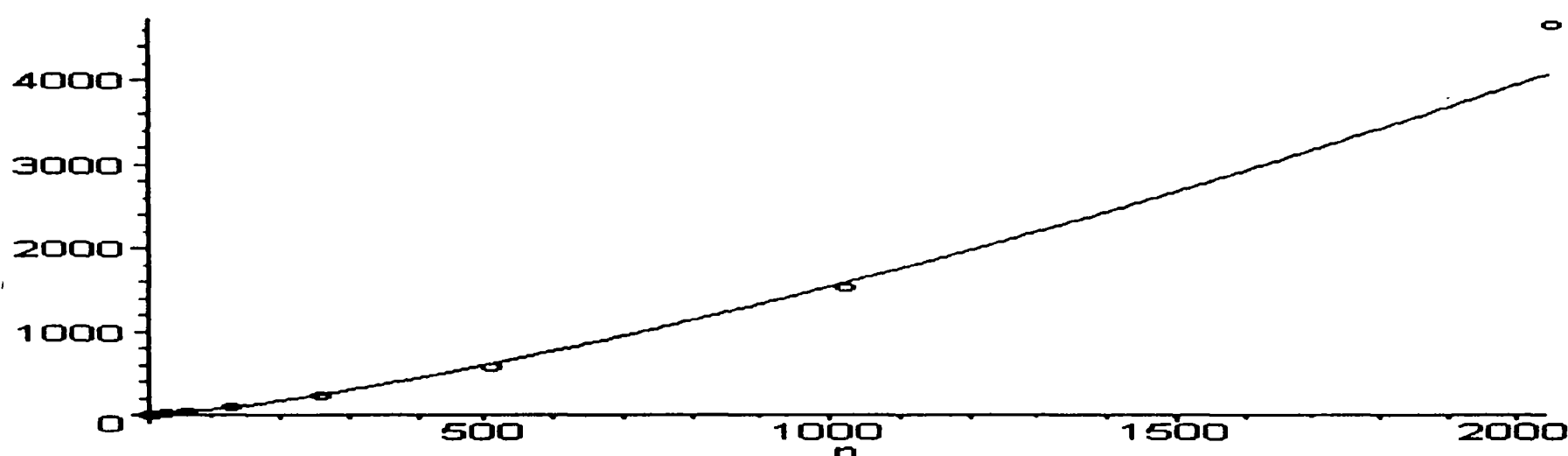
$$\ln T \leq \ln C + \gamma \ln n. \quad (2)$$

Generatorių simuliacijai Monte Karlo metodu naudojame skaičius $n = 2^k$, $k = 3, 4, \dots, 13$. Mažiausių kvadratų metodu gauname, kad algoritmo efektyvumo eilės γ įvertinimas yra lygus 1,4243. Simuliuotą eilės γ patikimumą užtikrina reikšmingumo p reikšmė, kuri yra lygi 10^{-10} . Sumažinę maksimalų generatorių skaičių n iki 2048, gauname, kad algoritmo efektyvumas padidėja iki eilės 1,358639. Vadinasi, pateikto Voronoi diagramos algoritmo efektyvumas didėja mažėjant generatorių skaičiui n . Algoritmo realizavimo laiko priklausomybė nuo generatorių skaičiaus n kartu su eksperimento duomenimis pavaizduota 3 pav. (abscisių ašyje atidėtas generatorių skaičius n , o ordinačių ašyje – algoritmo realizavimo laikas sekundėmis).

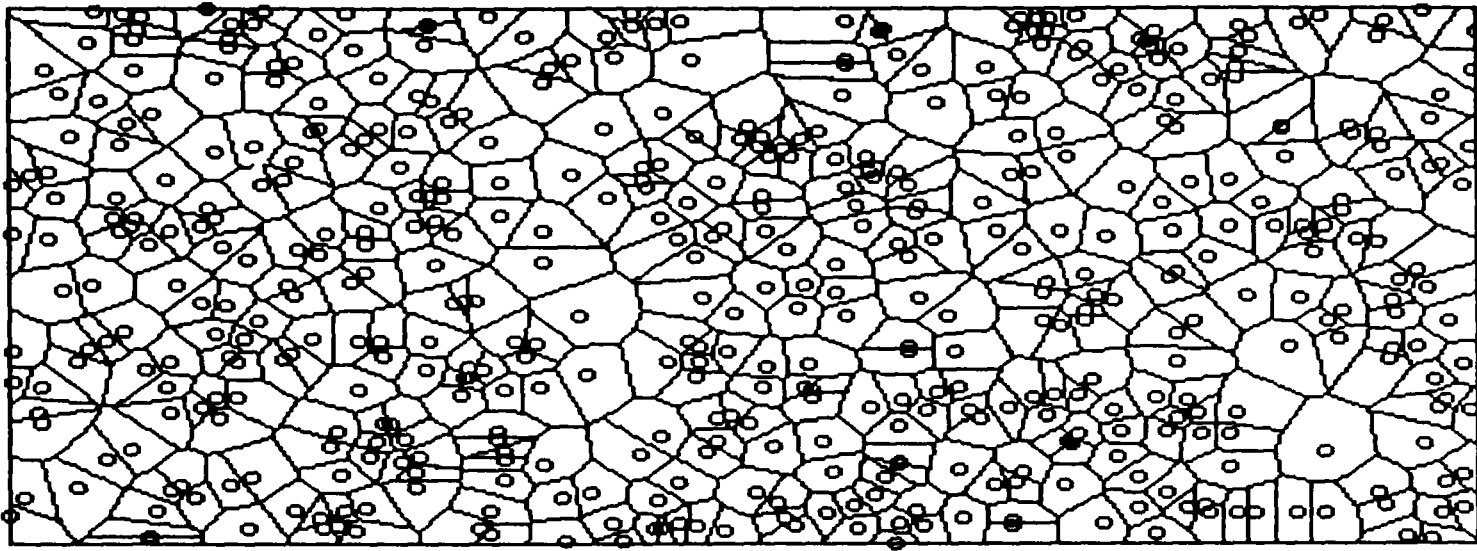
Toliau nagrinėsime medyno medžių pasiskirstymą pagal užimamą potencialią egzistencijos sritį. Tyrimui naudosisime fiksuoto medyno kiekvieno medžio koordinatės 0,25 ha sklype. Medynas pakartotinai buvo stebėtas 1983 m. ($n = 482$), 1988 m. ($n = 433$), 1996 m. ($n = 417$). Pagal medžio koordinatės kiekvienam medžiui priskiriame Voronoi daugiakampį, o medynui sudarome Voronoi diagramą. 31 metų amžiaus ($n = 482$) medyno Voronoi diagrama pateikta 4 pav.

Natūralu laikyti, kad medžio egzistencijos sritis yra Voronoi diagramos atitinkamas daugiakampis, o srities dydis išmatuojamas daugiakampio plotu s . Medyno medžių egzistencijos srities dydžio (daugiakampio ploto) pasiskirstymo funkciją apibrėžiame taip:

$$\hat{F}(s) = \frac{\#(s_i \leq s)}{n}, \quad (3)$$



3 pav. Algoritmo realizavimo laiko priklausomybė nuo generatorių skaičiaus n .



4 pav. Medyno medžių Voronoi diagrama.

čia $\#(s_i \leq s)$ yra Voronoi diagramos daugiakampių skaičius, kurių plotai mažesni arba lygūs s . Esant atsitiktinai pasiskirsčiusiai generatorių aibe plokštumoje Voronoi diagramos daugiakampių plotų tikslus teorinis skirstinys nėra žinomas. Todėl atsitiktinės Voronoi diagramos daugiakampių plotų pasiskirstymo funkciją simuliuosime Monte Karlo metodu. Atliekame 19 eksperimentų, atsitiktinai simuliuodami n taškų generatorių aibę analogiškoje plokštumos srityje. Kiekvieno Monte Karlo eksperimento Voronoi diagramos daugiakampių ploto pasiskirstymo funkcijas $F_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, 19$) apskaičiuojame formule (3). Papildomai įvedame tokias pasiskirstymo funkcijas [5]:

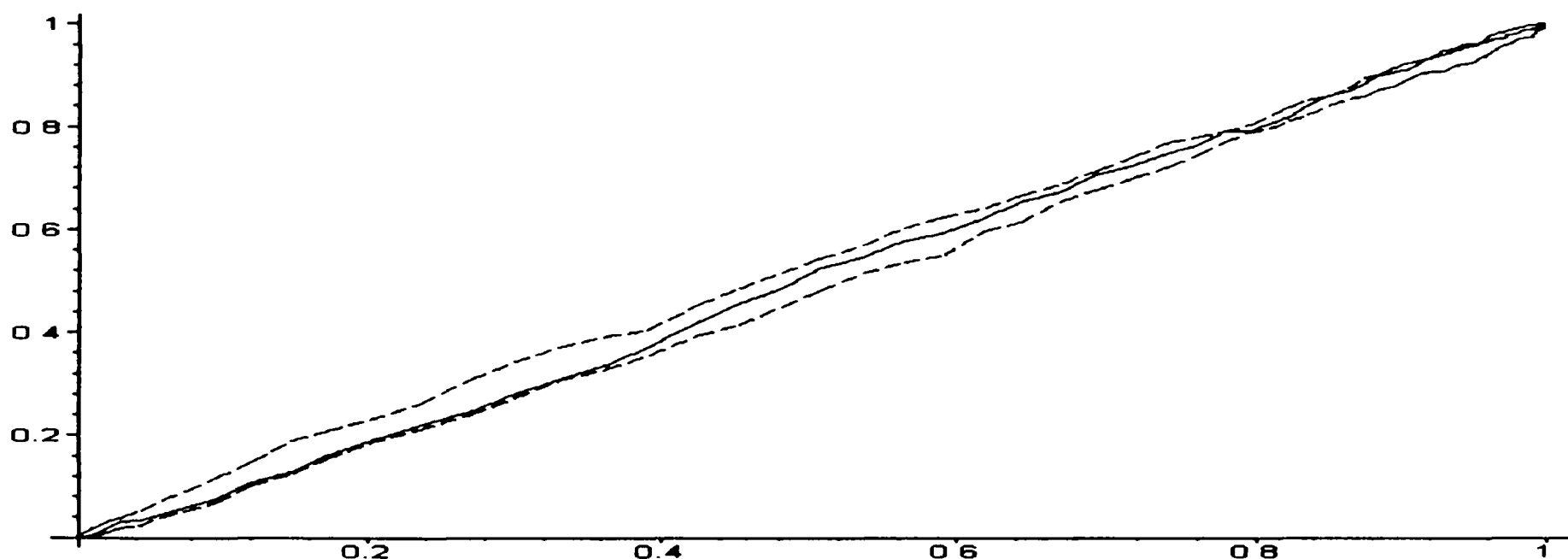
$$F(s) = \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{19} F_i(s), \quad F^v(s) = \max_{1 \leq i \leq 19} F_i(s), \quad F^a(s) = \min_{1 \leq i \leq 19} F_i(s).$$

Tada turime, kad

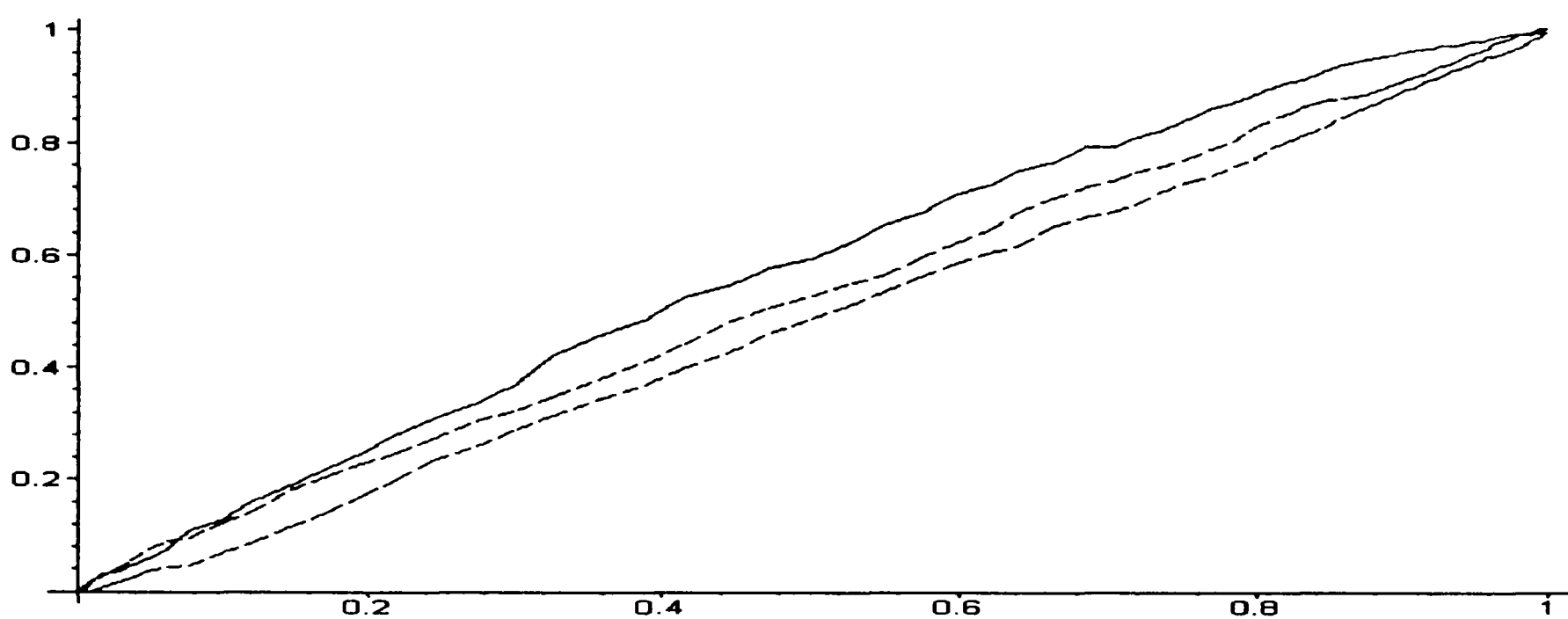
$$P(F(s) > F^v(s)) = P(F(s) < F^a(s)) = \frac{1}{20}.$$

Brėžiame kreivę abscisių ašyje atidėdami $F(s)$, o ordinačių ašyje – $\hat{F}(s)$. Jeigu medžių medyne išsidėstymas yra atsitiktinis, tada pavaizduota kreivė turi būti artima tiesei. Papildomai nubrėžiame dar dvi krieves ordinačių ašyje atidėdami pasiskirstymo funkcijas $F^v(s)$, $F^a(s)$. Šios dvi kreivės fiksuoja pirmajai kreivei leistiną zoną. Kadangi 5 pav. pavaizduota pirmoji kreivė nekerta apvaskalą, todėl galime tvirtinti, kad medyno medžių išsidėstymas yra atsitiktinis.

Sąveiką tarp atskirų medyno medžių identifikuosime grafiniu būdu. 6 pav. pavaizduota simuliuotų atsitiktinių plokštumos taškų Voronoi daugiakampių ploto pasiskirstymo kreivės apvaskalas ($n = 433$ ir $n = 417$) kartu su medyno medžių egzistencijos ploto pasiskirstymo kreive $\hat{F}(s)$ uždelsiant vieną periodą (1983 m., 1988 m.). Iš 6 pav. matome, kad medyno medžių egzistencijos ploto pasiskirstymo kreivė kerta jai simuliuotą apvaskalą. Tai parodo, kad tarp medyno medžių egzistuoja tarpusavio konkurencija dėl egzistencijos ploto padidinimo. Analizuodami 6 pav., galime daryti išvadą, kad 31 metų amžiaus medyno medžių tarpusavio sąveika išnyksta, kai egzistencijos plotas viršija $2,1 \text{ m}^2$.



5 pav. Medžių egzistencijos ploto pasiskirstymo kreivė (*ištisinė kreivė*) ir 19 Monte Karlo eksperimentų simuliuotas apvalkalas (*trūki kreivė*).



6 pav. Medžių egzistencijos ploto uždelsta pasiskirstymo kreivė (*ištisinė kreivė*) ir 19 Monte Karlo eksperimentų simuliuotas apvalkalas (*trūki kreivė*) 90 metų amžiaus medynui ($n = 214$).

Literatūra

- [1] G.S. Brown, Point density in stems per acre, *New Zealand Forestry Service Research Notes*, **38**, 1–11 (1965).
- [2] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, *Spatial Tessellations, Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, John Wiley and Sons, New York (1992).
- [3] K.H. Heal, M.L. Hansen, K.M. Rickard, *Maple V. Learning Guide*, Springer, New York (1996).
- [4] P. Rupšys, *MAPLE V. Kompiuterinė matematikos sistema*, Kaunas-Akademija (1999).
- [5] J.G. Diggle, *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns*, Academic Press, New York (1983).

Analysis and application of Voronoi diagram

P. Rupšys

In this paper an algorithm for constructing Voronoi diagram is given. Efficiency of the algorithm is investigated by the Monte Carlo simulation method. The Voronoi diagram is applied in the field of forestry.