Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 175–178

Геометрия неголономных комплексов $NGr(1,4,4)$

Казимерас НАВИЦКИС (VU)
e-mail: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Рассмотрим четырехмерное подмногообразие $Gr(1,4,4)$ шестимерного многообразия Грассмана $Gr(1,4)$ всех прямых четырехмерного проективного пространства P_4. Пусть $\{A_i\}$, где $i,j,k,\ldots = 1,\ldots,5$, – подвижной репер пространства P_4. Инфинитезимальное смещение такого репера определяется уравнениями

$$dA_i = \omega_i^j A_j,$$

где 1-формы ω_i^j являются инвариантными 1-формами проективной группы $PG(4,\mathbb{R})$, структурные уравнения Маурера–Картана которой имеют вид

$$D\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j.$$

Пусть l – образующий элемент многообразия $Gr(1,4)$. Будем считать, что подвижной репер $\{A_i\}$ пространства P_4 выбран так, что $l = (A_1A_2)$. В репере первого порядка дифференциальные уравнения комплекса $Gr(1,4,4)$ имеют вид:

$$\omega_2^3 + \omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^4 + \omega_1^5 = 0. \tag{1}$$

Геометрическим местом прямых, проходящих через фиксированную точку $M(t) = A_1 + tA_2$ прямой l и принадлежащих комплексу $Gr(1,4,4)$, является конус $\Gamma_2(t)$ с вершиной в точке $M(t)$. Касательной плоскостью $\Pi_2(t)$ конуса $\Gamma_2(t)$ вдоль образующей l является плоскость

$$\Pi_2(t)\colon\ x^3 - tx^4 = 0, \quad x^4 - tx^5 = 0.$$

Соответствие

$$K_1(l)\colon\ M(t) = A_1 + tA_2 \longleftrightarrow \Pi_2(t) \tag{2}$$

между точками $M(t)$ прямой l и плоскостями $\Pi_2(t)$, проходящими через прямую l, будем называть основным проективитетом комплекса

$Gr(1,4,4)$. Когда точка $M(t)$ пробегает прямую l, плоскости $\Pi_2(t)$ меняются и описывают гиперконус K_3 второго порядка с вершиной l:

$$K_3\colon\ x^3x^5 - (x^4)^2 = 0.$$

Основной проективитет $K_1(l)$ порождает проективитет

$$(M(t_1), M(t_2)) \longleftrightarrow \Pi_3(t_1,t_2),$$

сопоставляющий двум точкам $M(t_1)$ и $M(t_2)$ прямой l гиперплоскость

$$\Pi_3(t_1,t_2)\colon\ x^3 - (t_1+t_2)x^4 + t_1t_2x^5 = 0,$$

проходящую через прямую l. В предельном случае, когда $t_2 \to t_1 = t$, получаем гиперплоскость

$$\Pi_3(t)\colon\ x^3 - 2tx^4 + t^2x^5 = 0$$

и соответствующий проективитет

$$K_2(l)\colon\ M(t) \longleftrightarrow \Pi_3(t).$$

Когда точка $M(t)$ пробегает прямую l, гиперплоскости $\Pi_3(t)$ меняются и описывают гиперкоповерхность четвертого порядка, которая вырождается в двойную гиперкоплоскость $u_3 = 0$ и гиперкоконус второго порядка (u_i – тангенциальные координаты):

$$K_3^*\colon\ 4u_3u_5 - (u_4)^2 = 0.$$

Неголономным комплексом $NGr(1,4,4)$ назовем многообразие Грассмана $Gr(1,4)$ вместе с полем соответствий $K_1(l)$. Условия стационарности прямой l и инвариантности соответствия $K_1(l)$ определяются вполне интегрируемой системой ($p,q,\ldots,p_1,p_2,\ldots = 1,2$; $I,J,\ldots = 3,4,5$)

$$\theta_{p_1p_2} = 0, \quad \theta_{p_1\cdots p_4} = 0, \quad \omega_p^I = 0$$

(1-формы $\theta_{p_1p_2}$, $\theta_{p_1\cdots p_4}$ симметричные относительно всех индексов), где

$$\begin{aligned}
&4\theta_{11} = 4\omega_1^2 - \omega_4^3 - 2\omega_5^4,\\
&4\theta_{12} = 2\omega_2^2 - 2\omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_5^5,\\
&4\theta_{22} = 2\omega_3^4 - 4\omega_2^1 + \omega_4^5;\\
&\theta_{1111} = \omega_5^3,\ 4\theta_{1112} = \omega_4^3 - 2\omega_5^4,\\
&6\theta_{1122} = \omega_3^3 - 2\omega_4^4 + \omega_5^5,\\
&4\theta_{1222} = \omega_4^5 - 2\omega_3^4, \quad \theta_{2222} = \omega_3^5.
\end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения комплекса $NGr(1,4,4)$ в частично канонизированном репере имеют вид:

$$\theta_{p_1p_2} = L^p_{p_1p_2,I}\,\omega^I_p, \quad \theta_{p_1\cdots p_4} = L^p_{p_1\cdots p_4,I}\,\omega^I_p.$$

Дифференциально-геометрический объект $\{L^p_{p_1p_2,I},\ L^p_{p_1\cdots p_4,I}\}$ алгебраически подобен дифференциально-геометрическому объекту $\{A_{p_1\cdots p_5}, A_{p_1p_2p_3}, \tilde{A}_p, \tilde{C}_{p_1p_2p_3}, C_p, B_{p_1\cdots p_7}, B_{p_1\cdots p_5}, B_{p_1p_2p_3}, B_p, C_{p_1\cdots p_5}, C_{p_1p_2p_3}\}$. Тензор $B_{p_1\cdots p_7}$ определяет семь точек на прямой l

$$B_{p_1\cdots p_7}t^{p_1}\cdots t^{p_7} = 0$$

(инфлекционные центры; здесь положено $t = t^2 : t^1$).

Неголономный комплекс $NGr(1,4,4)$ будем называть оснащенным (или нормализованным), если к каждой прямой l этого комплекса присоединена плоскость π: $x^p = k^p_I x^I$, не пересекающая прямую l, и инвариантная относительно преобразований стационарной подгруппы прямой l.

Положим

$$2\lambda_p = \tilde{A}_p - 3B_p;$$

$$2\lambda_{p_1p_2p_3} = 2A_{p_1p_2p_3} + 9B_{p_1p_2p_3}.$$

Линейный комплекс прямых $LGr(1,4,4)$, определяемый уравнениями

$$p^{13} + p^{42} = (\lambda_{122} - 2\lambda_2)p^{34} + (\lambda_{112} - \lambda_1)p^{35} + \lambda_{111}p^{45},$$

$$p^{14} + p^{52} = -\lambda_{222}p^{34} - (\lambda_{122} + \lambda_2)p^{35} - (\lambda_{112} + 2\lambda_1)p^{45},$$

является инвариантным и внутренним образом определен рассматриваемым неголономным комплексом $NGr(1,4,4)$. Особой плоскостью комплекса $LGr(1,4,4)$ является инвариантная плоскость

$$\pi^{(1)}:\ x^p = \lambda^p_I x^I,$$

где

$$\begin{aligned}
&\lambda^1_3 = -\lambda_{222},\ \lambda^1_4 = -2\lambda_{122} + \lambda_2,\\
&\lambda^1_5 = -\lambda_{112} + \lambda_1,\\
&\lambda^2_3 = \lambda_{122} + \lambda_2,\\
&\lambda^2_4 = 2\lambda_{112} + \lambda_1,\ \lambda^2_5 = \lambda_{111}.
\end{aligned}$$

Полученная плоскость является внутренней оснащающей плоскостью.

Система величин $\{B_I^p\}$, где

$$B_3^1 = -6B_{222},\ B_4^1 = -12B_{122} - 4B_2,$$
$$B_5^1 = -6B_{112} - 4B_1,\ B_3^2 = 6B_{122} - 4B_2,$$
$$B_4^2 = 12B_{112} - 4B_1,\ B_5^2 = 6B_{111},$$

также определяет внутреннюю оснащающую плоскость

$$\pi^{(2)}:\ x^p = B_I^p x^I.$$

В работе доказано, что каждая из систем величин $\{A_I^p\}$ и $\{C_I^p\}$, где

$$A_3^1 = -4A_{222},\ A_4^1 = -8A_{122} + \frac{4}{5}\tilde{A}_2,$$
$$A_5^1 = -4A_{112} + \frac{4}{5}\tilde{A}_1,\ A_3^2 = 4A_{122} + \frac{4}{5}\tilde{A}_2,$$
$$A_4^2 = 8A_{112} + \frac{4}{5}\tilde{A}_1,\ A_5^2 = 4A_{111}$$

и

$$C_3^1 = -\frac{6}{5}\tilde{C}_{222},\ C_4^1 = -\frac{12}{5}\tilde{C}_{122} + 3C_2,$$
$$C_5^1 = -\frac{6}{5}\tilde{C}_{111} + 3C_1,\ C_3^2 = \frac{6}{5}\tilde{C}_{122} + 3C_2,$$
$$C_4^2 = \frac{12}{5}\tilde{C}_{112} + 3C_1,\ C_5^2 = \frac{6}{5}\tilde{C}_{111},$$

также определяет инвариантную оснащающую плоскость:

$$\pi^{(3)}:\ x^p = A_I^p x^I,\ \pi^{(4)}:\ x^p = C_I^p x^I.$$

Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Каждый из геометрических объектов λ_I^p, A_I^p, B_I^p, C_I^p определяет инвариантную плоскость комплекса $NGr(1,4,4)$.*

Geometry of nonholonomic complexes $NGr(1,4,4)$

K. Navickis

In this article intrinsic normalizations of a nonholonomic complexes $NGr(1,4,4)$ in projective space P_4 is constructed in an invariant form.