Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 171–174

Геометрия неголономных комплексов трехмерного проективного пространства

Казимерас НАВИЦКИС (VU)
e-mail: kazimieras.navickis@mif.vu.lt

Пусть $Gr(1,3)$ – четырехмерное многообразие Грассмана всех прямых трехмерного проективного пространства P_3. Трехмерное подмногообразие $Gr(1,3,3)$ многообразия $Gr(1,3)$ называется комплексом прямых пространства P_3. Пусть l – образующий элемент многообразия $Gr(1,3)$. Если $\{A_i\}$ – подвижной репер пространства P_3, то частичную канонизацию этого репера проведем так, чтобы $l = (A_1 A_2)$. Дифференциальные уравнения комплекса $Gr(1,3,3)$ в таком репере запишутся в виде ($p, q, \ldots = 1, 2$; $\alpha, \beta, \ldots = 3, 4$; $i, j, \ldots = 1, \ldots, 4$)

$$\lambda^p_\alpha \omega^\alpha_p = 0. \tag{1}$$

Множество всех прямых, принадлежащих комплексу $Gr(1,3,3)$ и проходящих через произвольную фиксированную точку $M(t) = A_1 + tA_2$, образует конус с вершиной в точке $M(t)$. Касательная плоскость этого конуса определяется уравнением

$$\Pi(t): \ (\lambda^2_\alpha - t\lambda^1_\alpha)x^\alpha = 0. \tag{2}$$

Следовательно, имеем проективитет (основной проективитет комплекса $Gr(1,3,3)$)

$$K: \ M(t) \longleftrightarrow \Pi(t) \tag{3}$$

между точками $M(t)$ прямой l и плоскостями $\Pi(t)$, проходящими через эту прямую.

Неголономным комплексом $NGr(1,3,3)$ называется многообразие Грассмана $Gr(1,3)$ вместе с полем соответствий K ([1]).

Будем предпологать, что

$$I = \lambda^1_3\lambda^2_4 - \lambda^1_4\lambda^2_3 \neq 0.$$

Пусть

$$\nabla\lambda^p_\alpha = d\lambda^p_\alpha + \lambda^q_\alpha\omega^p_q - \lambda^p_\beta\omega^\beta_\alpha.$$

Определим 1-формы ϑ_{pq} равенствами:

$$I \cdot \vartheta_{pq} = \sigma_{(p|r|}\sigma_{q)s}\lambda^r_\alpha \Delta \lambda^s_\beta \sigma^{\alpha\beta};$$

величины σ_{pq}, $\sigma^{\alpha\beta}$, определяемые следующим образом

$$||\sigma_{pq}|| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad ||\sigma^{\alpha\beta}|| = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

будут использоваться для поднятия и опускания индексов. Пусть

$$\varphi^q_p = \frac{1}{I}\lambda^q_\alpha \omega^\alpha_p, \ \Phi = \frac{1}{I}\lambda^p_\alpha \omega^\alpha_p,$$
$$\varphi_{pq} = \sigma_{pr}\varphi^r_q, \ \varphi^{pq} = \sigma^{pr}\sigma^{qs}\varphi_{rs};$$

используемые здесь величины σ^{pq} связаны с величинами σ_{pq} соотношениями $\sigma_{pr}\sigma^{rq} = \delta^q_p$, $\sigma^{pr}\sigma_{rq} = \delta^p_q$. В принятых обозначениях дифференциальные уравнения неголономного комплекса $NGr(1,3,3)$ имеют следующий вид:

$$\vartheta_{pq} = a_{pqrs}\varphi^{rs} + 2a_{r(p}\varphi^r_{q)} + a\varphi_{pq} + c_{pq}\Phi;$$

величины a_{pqrs}, a_{pq}, c_{pq} являются симметричными относительно всех индексов.

Будем рассматривать пару (N, Σ), где $N = \tau^p A_p$ – произвольная точка прямой l, а $\Sigma: \ \sigma_{pq}t^p\lambda^q_\alpha x^\alpha = 0$ является произвольной плоскостью, проходящей через l. Если точка N и плоскость Σ фиксированы, то

$$\varphi^{pq} = t^{(p}\tau^{q)}\Theta, \ \Phi = -\tilde{T}\Theta \ (\Theta \neq 0);$$

здесь $\tilde{T} = \sigma_{pq}t^p\tau^q$. Следовательно, прямая l, вращаясь около точки N в плоскости Σ описывает пучок прямых. Точка $M = t^p A_p$, соответствующая плоскости Σ в проективитете K, описывает кривую, касательной к которой в точке M является прямая $L = (M, P)$, где

$$P = \left(a_{pqrs}t^p t^q t^r \tau^s + \tilde{T}F_{pq}t^p t^q\right) A_2 + \tilde{T}Q,$$

причем

$$F_{pq} = -(a_{pq} + c_{pq}),$$
$$Q = t^1[(\lambda^1_4 t^2 - \lambda^2_4 t^1)A_3 + (\lambda^2_3 t^1 - \lambda^1_3 t^2)A_4].$$

Если точки $M = N$ совпадают $(\tau^p = t^p)$, прямая L принимает вид

$$(M, a_{pqrst}t^p t^q t^r t^s A_2).$$

Она не определена тогда и только тогда, когда координаты t^p точки M удовлетворяют уравнению

$$a_{pqrst}t^p t^q t^r t^s = 0,$$

определяющем четыре точки на прямой l (инфлекционные центры).

Если точки M и N находятся в соответствии

$$a_{pqrst}t^p t^q t^r \tau^s = 0,$$

из прямой L получаем прямую

$$(M, F_{pq}t^p t^q A_2 + Q).$$

Если $t^1 : t^2$ является переменным параметром, то эта прямая описывает поверхность второго порядка

$$I \cdot (\lambda^2_\alpha x^1 - \lambda^1_\alpha x^2)x^\alpha - F_{pq}\lambda^p_\alpha \lambda^q_\beta x^\alpha x^\beta = 0.$$

Прямая L, когда $t^1 : t^2$ является переменным параметром, а $\tau^1 : \tau^2$ – постоянное, описывает линейчатую поверхность третьего порядка

$$[I \cdot (x^1 X^2 - x^2 X^1) - F_{pq}X^p X^q] \cdot (X^2 \tau^1 - X^1 \tau^2) - a_{pqrs}X^p X^q X^r \tau^s = 0, \quad (4)$$

где положено $X^p = \lambda^p_\alpha x^\alpha$. При переменном $\tau^1 : \tau^2$ уравнение (4) определяет пучок поверхностей третьего порядка. Все точки плоскости $\sigma_{\alpha\beta}T^\alpha x^\beta = 0$, проходящей через прямую l, принадлежат поверхности (4) тогда и только тогда, когда

$$q^2\tau^1 - q^1\tau^2 = 0, \quad a_{pqrs}q^p q^q q^r \tau^s = 0,$$

где $q^p = \lambda^p_\alpha T^\alpha$.

Будем рассматривать такие полярные соответствия

$$A_{ij}u^i x^j = 0, \quad A_{ij} = A_{ji}, \quad \det ||A_{ij}|| \neq 0$$

(u^i и x^i – координаты точек), которым принадлежат проективные соответствия (3) на прямой l и те же соответствия на прямой $l + dl$ вдоль линейчатых поверхностей $\omega^\alpha_p = l^\alpha_p \theta$, $D\theta = 0$ для любого t. Полученное полярное соответствие

$$\sigma_{pq}\lambda^q_\alpha (x^\alpha u^p + u^\alpha x^p) + \frac{2}{I}\lambda^p_\alpha \lambda^q_\beta c_{pq} u^\alpha x^\beta = 0$$

индуцирует квадрику

$$\sigma_{pq}\lambda^q_\alpha x^p x^\alpha + \frac{1}{I}\lambda^p_\alpha \lambda^q_\beta c_{pq} x^\alpha x^\beta = 0.$$

Рассмотрим вдоль линейчатых интегральных поверхностей неголономного комплекса $NGr(1,3,3)$, определяемых уравнениями $\omega_p^\alpha = l_p^\alpha\theta$, $l_p^\alpha\lambda_\alpha^p = 0$, $D\theta = 0$, такие касательные корреляции $A_{ij}u^ix^j = 0$, для которых $A_{ij} = -A_{ji}$, $\det||A_{ij}|| \neq 0$. Положим

$$\begin{aligned}
&m = a_{pqrs}a^{pq}a^{rs};\\
&n = \det||a_{pq}||;\\
&B = 3a_{1122}^2 - 4a_{1112}a_{1222} + a_{1111}a_{2222};\\
&\triangle = a_{1111}a_{1122}a_{2222} + 2a_{1112}a_{1122}a_{1222} - a_{1111}a_{1222}^2 - a_{1112}^2a_{2222} - a_{1122}^3.
\end{aligned}$$

Тогда величина $s = a - A_{34}$ удовлетворяет уравнению третьей степени

$$s^3 - (B - 4n)s - 2(\triangle - m) = 0,$$

корни которого $s_v(v = 1,2,3)$ определяют три линейные комплексы прямых

$$\lambda_3^1p^{32} + \lambda_4^1p^{42} + \lambda_3^2p^{13} + \lambda_4^2p^{14} + (a - s_v)p^{34} = 0.$$

Литература

[1] К.И. Гринцевичюс, О неголономном комплексе, Lietuvos Matem. Rink., **8**(4), 85–99 (1969).

Geometry of nonholonomic complexes in threedimensional projective space

K. Navickis

In this article the differential geometry of nonholonomic complexes in threedimensional projective space is considered.