

Apie parabolinio tipo $(\varphi, \xi, \eta, \lambda)$ -struktūrų normalumą

Angelė BAŠKIENĖ (ŠU)

el. paštas: baskiene@fm.su.lt

Elipsinio ir hiperbolinio tipo beveik kontaktinių struktūrų (φ, ξ, η) normalumas tyrinėtas daugelio matematikų [2, 3].

Parabolinio tipo $(\varphi, \xi, \eta, \lambda)$ -struktūrą n -matėje daugdaroje M_n apibrėžia afinorius φ_a^b , vektorius ξ^b , kovektorius η_a , funkcija λ , tenkinantys sąlygas [1]:

$$\begin{aligned} \varphi_a^c \varphi_c^b &= -\xi^b \eta_a, & \varphi_a^c \eta_c &= -\lambda \eta_a, & \varphi_a^c \xi^a &= -\lambda \xi^c, & \xi^a \eta_a &= -\lambda^2, \\ a, b, \dots &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

Analogiškai elipsiniam ir hiperboliniam atvejui ši struktūra vadinama normaliaja, jeigu daugdaroje $M_n \times R$ afinorinė struktūra

$$\left(\tilde{F}_\alpha^\beta \right) = \begin{pmatrix} \varphi_a^b & \xi^b \\ \eta_a & \lambda \end{pmatrix}, \quad (2)$$

tenkinanti sąlygą

$$\tilde{F}_\alpha^\gamma \tilde{F}_\gamma^\beta = 0, \quad (3)$$

yra integruojamoji, t.y. afinoriaus \tilde{F} Nijenhuis'o tenzorius lygus 0:

$$\tilde{N}_{\gamma\beta}^\alpha = \tilde{F}_\gamma^\delta \tilde{\nabla}_\delta \tilde{F}_\beta^\alpha - \tilde{F}_\beta^\delta \tilde{\nabla}_\delta \tilde{F}_\gamma^\alpha - \tilde{F}_\delta^\alpha \left(\tilde{\nabla}_\gamma \tilde{F}_\beta^\delta - \tilde{\nabla}_\beta \tilde{F}_\gamma^\delta \right) = 0. \quad (4)$$

Čia $\alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots, n, n+1$, tenzorių \tilde{F}_α^β ir $\tilde{N}_{\gamma\beta}^\alpha$ komponentės priklauso tik nuo x^α , o kovariantinis diferencijavimas atliekamas bet kurios simetrinės afiniosios sieties atžvilgiu. Surašę tenzorius $\tilde{N}_{\gamma\beta}^\alpha$ komponentes, kai $\alpha(\beta, \gamma, \dots)$ įgyja reikšmes $a(b, c, \dots)$ ir $n+1$, gauname būtinas ir pakankamas (1) struktūros normalumo sąlygas [1]:

- a) $S_{cb}^a = \tilde{N}_{cb}^a = N_{cb}^a - \xi^a (\nabla_c \eta_b - \nabla_b \eta_c) = 0,$
- b) $S_{cb} = \tilde{N}_{cb}^{n+1} = \varphi_c^d (\nabla_d \eta_b - \nabla_b \eta_d) - \varphi_b^d (\nabla_d \eta_c - \nabla_c \eta_d) + \nabla_c \lambda \eta_b - \nabla_b \lambda \eta_c = 0,$
- c) $S_c^a = \tilde{N}_{c,n+1}^a = \xi^d (\nabla_c \varphi_d^a - \nabla_d \varphi_c^a) + \varphi_c^d \nabla_d \xi^a + \lambda \nabla_c \xi^a = 0,$
- d) $S_c = \tilde{N}_{c,n+1}^{n+1} = \xi^d (\nabla_c \eta_d - \nabla_d \eta_c) + \varphi_c^d \nabla_d \lambda + \lambda \nabla_c \lambda = 0.$

(5)

Čia ∇ – kovariantinio diferencijavimo daugdaroje M_n simbolis, o N_{cb}^a yra afinoriaus φ Nijenhuis'o tenzorius.

Žinoma [2, 3], jog tiek elipsiniu, tiek hiperboliniu atveju beveik kontaktinės struktūros normalumas charakterizuojamas vien (5_a) lygybe, nes iš sąlygos $S_{cb}^a = 0$ išplaukia, jog $S_c^a = S_{cb} = S_c = 0$. Parabolinio tipo $(\varphi, \xi, \eta, \lambda)$ -struktūroms bendru atveju iš (5_a) sąlygos neišplaukia likusios (5) sąlygos.

Pateiksime keletą pavyzdžių.

1. Trimatėje daugdaroje $M_3(x^1, x^2, x^3)$ afinorius

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/(1+3(x^3)^2) \\ 0 & 0 & 1/(1+3(x^3)^2) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

nulinis vektorius ir kovektorius $(-\frac{3x^3}{1+3(x^3)^2}, \frac{1}{x^3(1+3(x^3)^2)}, 0)$ tenkina (1) sąlygas ($\lambda = 0, x^3 \neq 0$). Pateiktai (φ, η) -struktūrai [1] $S_{cb}^a = 0$, tačiau

$$S_{12} = -\frac{1}{(x^3)^2(1+3(x^3))^2} \neq 0.$$

2. Daugdaroje M_3 afinorius $\begin{pmatrix} 0 & 2x^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, vektorius $(0, 1, -x^2)$, nulinis kovektorius

ir $\lambda = 0$ taip pat tenkina (1) aksiomas. Tokiai struktūrai $S_{cb}^a = 0$, bet $S_1^3 = -2x^2 \neq 0$, kai $x^2 \neq 0$.

Daugeliu atvejų sąlyga $S_{cb}^a = 0$ yra būtina ir pakankama, kad parabolinio tipo $(\varphi, \xi, \eta, \lambda)$ -struktūra būtų normalioji. Nustatysime šiuos atvejus.

Nesunku pastebėti, jog dėl (2) ir (4) išraiškų

$$\tilde{N}_{\epsilon\beta}^\alpha \tilde{F}_\gamma^\epsilon - \tilde{N}_{\gamma\epsilon}^\alpha \tilde{F}_\beta^\epsilon = 0; \quad \tilde{N}_{\alpha\epsilon}^\gamma \tilde{F}_\beta^\epsilon + \tilde{N}_{\alpha\beta}^\epsilon \tilde{F}_\epsilon^\gamma = 0. \quad (6)$$

Surašę šias lygybes, kai $\alpha(\beta, \gamma, \dots)$ įgyja reikšmes $a(b, c, \dots)$ ir $n+1$, gauname, jog

$$\begin{aligned} \text{a)} & S_{eb}^a \varphi_c^e - S_b^a \eta_c - S_{ce}^a \varphi_b^e - S_c^a \eta_b = 0, \\ \text{b)} & S_{eb}^a \xi^e - \lambda S_b^a + S_e^a \varphi_b^e = 0, \\ \text{c)} & S_{eb} \varphi_c^e - S_b \eta_c - S_{ce} \varphi_b^e - S_c \eta_b = 0, \\ \text{d)} & S_e \xi^e = S_e^a \xi^e = 0, \\ \text{e)} & S_e \varphi_c^e - S_{ce} \xi^e - \lambda S_c = 0, \\ \text{f)} & S_{ae}^c \varphi_b^e + S_{ab}^e \varphi_e^c + S_a^c \eta_b + S_{ac} \xi^c = 0, \\ \text{g)} & S_{ae} \varphi_b^e + S_a \eta_b + S_{ab}^e \eta_e + \lambda S_{ab} = 0, \\ \text{h)} & S_e^c \varphi_b^e + S_b^e \varphi_e^c + S_b \xi^c = 0, \\ \text{i)} & S_{ae}^c \xi^e + S_a^e \varphi_e^c + \lambda S_a^c + S_a \xi^c = 0, \\ \text{j)} & S_{ae} \xi^e + S_a^e \eta_e + 2\lambda S_a = 0, \\ \text{k)} & S_e \varphi_b^e + S_b^e \eta_e + \lambda S_b = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

1 lema. $S_{ab}^a = S_b$.

Iš (2) ir (3) išplaukia, jog $\tilde{F}_\alpha^a = \varphi_a^a + \lambda = 0$, o iš (1) $\varphi_e^a \varphi_a^e = \lambda^2$, todėl $\varphi_a^e \nabla_b \varphi_e^a = \lambda \nabla_b \lambda$. Iš (5) ir Nijenhuis'o tenzoriaus N_{cb}^a išraiškos gauname, kad

$$\begin{aligned} S_{ab}^a &= \varphi_a^e \nabla_e \varphi_b^a - \varphi_b^e \nabla_e \varphi_a^a - \varphi_e^a (\nabla_a \varphi_b^e - \nabla_b \varphi_a^e) - \xi^a (\nabla_a \eta_b - \nabla_b \eta_a) \\ &= \varphi_b^e \nabla_e \lambda + \lambda \nabla_b \lambda + \xi^a (\nabla_b \eta_a - \nabla_a \eta_b) = S_b. \end{aligned}$$

Panaudoję (7) formules galime gauti tokį rezultatą.

Išvada. Jei bent vienas iš tenzorių S_{cb}^a, S_{cb}, S_c^a lygus 0, tuomet $S_c = 0$.

Pritaikę 1 lema gauname, jog kai $S_{cb}^a = 0$, tuomet $S_c = 0$. Iš (7_h), (7_j), (5_d), (5_c) išplaukia, jog $S_c = 0$, kai $S_c^a = 0$. Analogiškai iš (7_c), (7_j), (5_d), (5_b) išplaukia, jog tuo atveju, kai $S_{cb} = 0$, gauname $S_c = 0$.

2 lema. Jei $S_{cb}^a = 0$, tuomet

- 1) $S_b^a \eta_c + S_c^a \eta_b = 0$;
- 2) $S_e^a \varphi_b^e = \lambda S_b^a$;
- 3) $S_{ce} \xi^e = S_e^a \xi^e = S_e^a \eta_a = 0$; $S_c = 0$; (8)
- 4) $S_a^c \eta_b + S_{ab} \xi^c = 0$;
- 5) $S_{ae} \varphi_b^e = -\lambda S_{ab}$;
- 6) $S_b^e \varphi_e^a = -\lambda S_b^a$.

1 teorema. Parabolinio tipo $(\varphi, \xi, \eta, \lambda \neq 0)$ -struktūra yra normalioji tada ir tik tada, kai $S_{cb}^a = 0$.

Įrodysime sąlygos $S_{cb}^a = 0$ pakankamumą, nes būtinumas išplaukia iš normalumo apibrėžimo.

Tarkime, jog $S_{cb}^a = 0$. Pagal 1 lema $S_b = 0$. Po (8₂) lygybės kompozicijos su φ_c^b iš (1) išplaukia, jog $\lambda S_b^a \varphi_c^b = 0$. Dar kartą pritaikę (8₂) lygybę, gauname $\lambda^2 \cdot S_c^a = 0$. Kadangi pagal teoremos sąlygą $\lambda \neq 0$, vadinasi, $S_c^a = 0$. Analogiškai iš (8₅) gauname $S_{bc} = 0$. Taigi $(\varphi, \xi, \eta, \lambda \neq 0)$ -struktūra yra normalioji.

2 teorema. Parabolinio tipo $(\varphi, \xi, \eta, \lambda)$ -struktūra, kuriai vektorius ξ^a ir kovektorius η_b nėra nuliniai, yra normalioji tada ir tik tada, kai $S_{cb}^a = 0$.

Kai $S_{cb}^a = 0$, iš (8₁) $S_b^a \eta_c = -S_c^a \eta_b$. Tarkime, jog kuris nors $\eta_i = 0$. Tada $S_i^a \eta_b = 0$, $b = 1, 2, \dots, n$. Kadangi bent vienas iš η_b nėra lygus 0, $S_i^a = 0$. Tarkime, jog $\eta_i \neq 0$. Tuomet kai $c = b = i$, $S_i^a \eta_i = -S_i^a \eta_i = 0$, $S_i^a = 0$. Taigi $S_i^a = 0$ su kiekvienu i .

Pagaliau iš (8₄) $S_{ab} \xi^e = 0$. Iš čia $S_{ab} = 0$, nes ξ^c nėra nulinis vektorius.

Vadinasi, $(\varphi, \xi, \eta, \lambda)$ -struktūra, kuriai ξ^a ir η_b nėra nuliniai, yra normalioji tada ir tik tada, kai $S_{cb}^a = 0$.

Belieka išnagrinėti keletą ypatingų atvejų.

1. Jei $\xi^a = \eta_b = \lambda = 0$, beveik dualioji struktūra φ yra normalioji tada ir tik tada, kai ji yra integruojamoji, t.y. kai afinoriaus φ Nijenhuis'o tenzorius $N_{cb}^a = S_{cb}^a = 0$.

2. Tarkime, jog parabolinio tipo $(\varphi, \xi, \eta, \lambda)$ -struktūra tenkina sąlygą $\lambda = \xi^a = 0$, η_b – nėra nulinis kovektorius. Jei $S_{cb}^a = 0$, tuomet $S_b = 0$, $S_c^a = 0$, bet nebūtinai $S_{cb} = 0$. Šiuo atveju ($\lambda = \xi^a = 0$) (φ, η) -struktūra [1] yra normalioji tada ir tik tada, kai ji yra integruojamoji ($N_{cb}^a = S_{cb}^a = 0$) ir

$$S_{cb} = \varphi_c^d (\nabla_d \eta_b - \nabla_b \eta_d) - \varphi_b^d (\nabla_d \eta_c - \nabla_c \eta_d) = 0.$$

3. Jei $\lambda = \eta_b = 0$, bet ξ^a nėra nulinis vektorius, tuomet struktūra (φ, ξ) yra normalioji tada ir tik tada, kai ji yra integruojamoji ir

$$S_c^a = \xi^d (\nabla_c \varphi_d^a - \nabla_d \varphi_c^a) + \varphi_c^d \nabla_d \xi^a = 0.$$

Literatūra

- [1] A. Baškienė, Beveik kontaktinių struktūrų paraboliniai analogai, *Liet. matem. rink.*, spec. nr., **41**, 233–238 (2001).
- [2] Y. Tashiro, On contact structure of hypersurfaces in complex manifolds, I, *Tohoku Math. J.*, **15**, 62–78 (1963).
- [3] А. Крищюнайте, Об условиях нормальности и интегрируемости почти контактных структур на гиперповерхностях комплексного и двойного пространства, *Уч. зап. Казанского ун-та*, **128**(3), 55–75 (1968).

On normality of parabolic $(\varphi, \xi, \eta, \lambda)$ -structures

A. Baškienė

In the article necessary and sufficient conditions are found for the parabolic $(\varphi, \xi, \eta, \lambda)$ -structure to become normal.