

Краевая задача Римана с бесконечным индексом и неограниченным коэффициентом логарифмического порядка $0 < \rho, \sigma < 1$ для полуплоскости

Пятрас АЛЕКНА (ŠU)

e-mail: mat.kat@fm.su.lt

Рассматривается краевая задача Римана: найти функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, аналитические и ограниченные соответственно в верхней D^+ и нижней D^- полуплоскости (класс \mathcal{B}), предельные значения которых $\Phi^\pm(t)$ удовлетворяют на вещественной оси краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (1)$$

где относительно коэффициента $G(t)$ и свободного члена $g(t)$ сделаны следующие предположения:

$$\ln G(t) \in \mathcal{D}_\rho \quad (2)$$

для любого конечного отрезка вещественной оси;

$$\ln |G(t)| = \begin{cases} \psi_1(t) \ln^\rho |t|, & \text{если } t \leq -R, \\ \psi_2(t) \ln^\sigma |t|, & \text{если } t \geq R, \end{cases} \quad (3)$$

для любого $R > e^{2\pi}$, где $0 < \rho, \sigma < 1$,

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &\in \mathcal{D}_\gamma(-\infty \leq t \leq -R), & \gamma > \rho + 2, & \psi_1(-\infty) = \kappa_1, \\ \psi_2(t) &\in \mathcal{D}_\delta(R \leq t \leq +\infty), & \delta > \sigma + 2, & \psi_2(+\infty) = \kappa_2, \kappa_1^2 + \kappa_2^2 > 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\arg G(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) \ln^\alpha |t|, & \text{если } t \leq -R, \\ \varphi_2(t) \ln^\beta |t|, & \text{если } t \geq R, \end{cases} \quad 0 < \alpha, \beta < 1, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &\in \mathcal{D}_\mu(-\infty \leq t \leq -R), & \mu > \alpha + 2, & \varphi_1(-\infty) = \lambda_1, \\ \varphi_2(t) &\in \mathcal{D}_\nu(R \leq t \leq +\infty), & \nu > \beta + 2, & \varphi_2(+\infty) = \lambda_2 \geq 0, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$g(t) \in \mathcal{H}_q(-\infty \leq t \leq +\infty), \quad q > \max(\rho, \sigma, \alpha, \beta), \quad g(\pm\infty) = 0. \quad (7)$$

Из (3) и (4) следует, что коэффициент $G(t)$ задачи Римана не ограничен, а из (5) и (6) следует, что задача (1)–(7) имеет бесконечный индекс логарифмического порядка $0 < \alpha, \beta < 1$.

В работах автора [1],[2] коэффициент $|G(t)|$ был ограничен на вещественной оси, а в статье [3] исследован случай бесконечного индекса и неограниченного коэффициента логарифмического порядка $\min(\rho, \sigma) > 1$ и $\min(\alpha, \beta) > 1$.

Применяя асимптотику интеграла типа Коши с логарифмической плотностью ([2], с.7), в предположениях (2)–(6) для канонической функции

$$X^{\pm}(z) = \exp \left\{ \frac{z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(x) dx}{x(x-z)} \right\} \quad (8)$$

получаем асимптотическое равенство ($z \rightarrow \infty, z \notin [-\infty, +\infty]$):

$$\begin{aligned} X^{\pm}(z) = \exp \left\{ \frac{-\kappa_2}{2\pi i(\sigma+1)} \ln^{\sigma+1} z + \frac{\kappa_2}{2} \ln^{\sigma} z + \frac{\kappa_1}{2\pi i(\rho+1)} (\ln z + \pi i)^{\rho+1} \right. \\ \left. - \frac{\kappa_1}{2} (\ln z + \pi i)^{\rho} - \frac{\lambda_2}{2\pi(\beta+1)} \ln^{\beta+1} z + \frac{i\lambda_2}{2} \ln^{\beta} z \right. \\ \left. + \frac{\lambda_1}{2\pi(\alpha+1)} (\ln z + \pi i)^{\alpha+1} - \frac{i\lambda_1}{2} (\ln z + \pi i)^{\alpha} + S^{\pm}(z) \right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

где ветви $(\ln z + \pi i)^{\rho}$, $(\ln z + \pi i)^{\alpha}$ и $\ln z + \pi i$ непрерывны в области $(R < |z| < \infty) \cap (-\pi < \arg z < \pi)$, $(\ln x + \pi i)^{\rho} > 0$, $(\ln x + \pi i)^{\alpha} > 0$ и $\ln x + \pi i > 0$ на нижнем берегу разреза по лучу $\arg z = \pi$ при $x < -R$, а ветви $\ln^{\sigma} z$, $\ln^{\beta} z$ и $\ln z$ непрерывны в области $(R < |z| < \infty) \cap (0 < \arg z < 2\pi)$, $\ln^{\sigma} x > 0$, $\ln^{\beta} x > 0$ и $\ln x > 0$ на верхнем берегу разреза по лучу $\arg z = 0$ при $x > R$, $S^{\pm}(z)$ – кусочно аналитическая и ограниченная функция в окрестности $z = \infty$.

Сформулируем основные результаты исследования.

Теорема 1. Для разрешимости в классе \mathcal{B} однородной краевой задачи Римана ($g(t) = 0$) с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости в предположениях (2)–(6) необходимо и достаточно, чтобы для заданных величин $\lambda_1, \lambda_2, \alpha$ и β выполнялось одно из условий:

- 1) $\alpha < \beta, \lambda_2 = 0, \lambda_1 < 0$;
- 2) $\alpha < \beta, \lambda_2 > 0, -\infty < \lambda_1 < +\infty$;
- 3) $\alpha > \beta, \lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$;
- 4) $\alpha > \beta, \lambda_1 < 0, -\infty < \lambda_2 < \infty$;
- 5) $\alpha = \beta, \lambda_2 - \lambda_1 > 0$.

Теорема 2. В предположениях (2)–(6) для предельных значений канони-

ческой функции $X^+(z)$ на вещественной оси справедливо представление:

$$\ln X^+(t) = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{2\pi(\alpha+1)} \ln^{\alpha+1} |t| - \frac{\lambda_2}{2\pi(\beta+1)} \ln^{\beta+1} |t| + \frac{\varkappa_1}{2} \ln^\rho |t| + \\ + i(P_{\sigma,\rho}(t) + \frac{\lambda_1}{2} \ln^\alpha |t|) + S_1^+(t) + T_1(t), & t < -R, \\ S_0^+(t) & |t| \leq R, \\ \frac{\lambda_1}{2\pi(\alpha+1)} \ln^{\alpha+1} t - \frac{\lambda_2}{2\pi(\beta+1)} \ln^{\beta+1} t + \frac{\varkappa_2}{2} \ln^\sigma t + \\ + i(P_{\sigma,\rho}(t) + \frac{\lambda_2}{2} \ln^\beta t) + S_2^+(t) + T_2(t), & t > R, \end{cases}$$

где

$$P_{\sigma,\rho}(|t|) = \frac{\varkappa_2}{2\pi(\sigma+1)} \ln^{\sigma+1} |t| - \frac{\varkappa_1}{2\pi(\rho+1)} \ln^{\rho+1} |t|, \quad (|t| \geq R),$$

$$S_0^+(t) \in \mathcal{D}_{p-1}(-R \leq t \leq R),$$

$$S_1^+(t) \in \mathcal{D}_{\eta_1}(-\infty \leq t \leq -R), \quad \eta_1 = \min(p-1, \mu-\alpha-1, \gamma-\rho-1, 3-\alpha, 3-\rho),$$

$$S_2^+(t) \in \mathcal{D}_{\eta_2}(R \leq t \leq \infty), \quad \eta_2 = \min(p-1, \nu-\beta-1, \delta-\sigma-1, 3-\beta, 3-\sigma),$$

а $T_k(t)$ ($k = 1, 2$) – ограниченные функции при $|t| > R$, производные которых удовлетворяют при $|t| > R$ ($t \neq \pm\infty$) оценке:

$$|T'_k(t)| \leq \frac{A_k}{|t|}, \quad (0 < A_k = \text{const}).$$

Теорема 3. Если каноническая функция $X^\pm(z)$ определена формулой (8), а целая функция $F_0(z) = F_{10}(z)F_{20}(z)$ нулевого порядка роста с нулями на мнимой оси определена равенствами

$$F_{10}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{ir'_n}\right), \quad r'_n = \exp \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{-\lambda_1} \right\}^{\frac{1}{\alpha}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (10)$$

$$F_{20}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r''_n}\right), \quad r''_n = \exp \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{\lambda_2} \right\}^{\frac{1}{\beta}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (11)$$

то в предположениях (2)–(6) при $\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \geq 0$ ¹ справедлива оценка ($z \rightarrow \infty$):

$$|F_0(z)X^\pm(z)| \leq \exp\{A \cdot \ln^{\gamma_0} |z|\},$$

где $0 < A = \text{const}, \gamma_0 = \max(1 - \alpha, 1 - \beta, \rho, \sigma), 0 < \gamma_0 < 1$.

Теорема 4. Неоднородная краевая задача Римана (1)–(7) с плюс-бесконечным индексом ($\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \geq 0$) логарифмического порядка $0 < \alpha, \beta < 1$ и неограниченным коэффициентом логарифмического порядка $0 < \rho, \sigma < 1$ для

¹если $\lambda_1 = 0$ ($\lambda_2 = 0$), то определяется только одна целая функция $F_{20}(z)$ ($F_{10}(z)$).

полуплоскости имеет бесконечное множество решений, общая формула которых имеет вид

$$\Phi^{\pm}(z) = X^{\pm}(z) \left\{ \frac{F_0(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x) dx}{F_0(x)X^+(x)(x-z)} + F(z) \right\},$$

где $X^{\pm}(z)$ – каноническая функция (8), целая функция $F_0(z)$ определена равенствами (10), (11), а $F(z)$ – произвольная целая функция нулевого порядка, для которых на вещественной оси справедливо асимптотическое неравенство ($|t| > R$)

$$\ln |F(t)| < \frac{\lambda_2}{2\pi(\beta+1)} \ln^{\beta+1} |t| - \frac{\lambda_1}{2\pi(\alpha+1)} \ln^{\alpha+1} |t| + \frac{\varkappa}{2} \ln^{\xi} |t| + C_F,$$

где

$$\xi = \max(\rho, \sigma), \quad \varkappa = \begin{cases} \varkappa_1, & \text{если } \rho > \sigma, \\ \varkappa_2, & \text{если } \sigma > \rho. \end{cases}$$

Теорема 5. Для разрешимости неоднородной краевой задачи Римана (1)–(7) с минус-бесконечным индексом ($\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \leq 0$) логарифмического порядка $0 < \alpha$, $\beta < 1$ и неограниченным коэффициентом для полуплоскости достаточно, чтобы целая функция $F_0(z)$ и свободный член $g(x)$ удовлетворяли условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0(x)g(x)}{X^+(x)(x-z_k)} dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где z_k – нули целой функции $F_0(z)$, определенной равенствами (10) и (11), в которых знаки λ_1 и λ_2 в выражениях нулей r'_n и r''_n , заменены на противоположные, $X^+(x)$ – предельные значения канонической функции (8). При выполнении (12) условий единственное решение неоднородной задачи (1)–(7) выражается формулой

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{X^{\pm}(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x) dx}{X^+(x)(x-z)}. \quad (12)$$

Литература

- [1] П. Алекна, Об однородной краевой задаче Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости, *Liet. matem. rink.*, **13**(3), 5–13 (1973).
 [2] П. Алекна, Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка $0 < \gamma < 1$ для полуплоскости, *Liet. matem. rink.*, **14**(3), 5–18 (1974).

- [3] П. Алекна, Неоднородная краевая задача Римана с неограниченным коэффициентом логарифмического порядка для полуплоскости, *Liet. matem. rink.*, **42**(spec.nr.), 155–158 (2002).

Begalinio indekso kraštinis Rymano uždavinys su logaritminės eilės $0 < \rho, \sigma < 1$ neaprežtu koeficientu pusplokštumei

P. Alekna

Išnagrinėtas logaritminės eilės $0 < \alpha, \beta < 1$ begalinio indekso kraštinis Rymano uždavinys pusplokštumei su logaritminės eilės $0 < \rho, \sigma < 1$ neaprežtu koeficientu aprežtų analizinių funkcijų klasėje \mathcal{B} .