Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 115–119

Сходимость сумм линейных процессов с дальней зависимостью и бесконечной дисперсией

Мариус ВАЙЧЮЛИС (MII, ŠU)
e-mail: otaras@delfi.lt

1. Введение и основной результат статьи

В настоящей работе исследуется слабая сходимость в пространстве Скорохода D[0, 1] частичных сумм линейных процессов

$$X_t = \sum_{i\in\mathbb{Z}} b_{t-i}\xi_i, \tag{1.1}$$

где последовательность ξ_i, $i \in \mathbb{Z}$ является мартингал-разностью и к тому же таковой, что для каждого $i \in \mathbb{Z}$ случайные величины (сл.в.) ξ_i "принадлежат области притяжения,, устойчивого с показателем $1 < \alpha < 2$ закона, а функция b имеет вид

$$b_i = \begin{cases} c_+ L(i) i^{d-1}, & \text{если } i > 0, \\ c_- L(|i|)|i|^{d-1}, & \text{если } i < 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

где постоянные c_+, c_- таковы что, $|c_+| + |c_-| \neq 0$, $L(x), x \geqslant 1$ – медленно меняющаяся в бесконечности функция (м.м.ф.), ограниченая на конечных интервалах, и $d > 0$ – параметр сильной зависимости, удовлетворяющий условию

$$0 < d < 1 - \frac{1}{\alpha}. \tag{1.3}$$

Предельные теоремы для частичных сумм линейных процессов (1), в случае, когда ξ_i, $i \in \mathbb{Z}$ – последовательность независимых одинакого распределенных случайных величин с конечной дисперсией, рассмотренны в [6], [7]. Случай бесконечной дисперсий (ξ_i – н.о.р.сл.в. принадлежащие области притяжения устойчивого закона) можно найти в [1], [3], [5], [8]. В часности в [3] доказанно, что конечномерные распределения нормированного процесса $\sum_{s=1}^{[Nt]} X_s$, $t \in \mathbb{Z}$ сходятся при $N \to \infty$ к соответствующим распределениям процесса, определеного стохастическим интегралом

$$J_{\alpha,d}(t) := \int_{\mathbb{R}} \Big\{ \int_0^t (c_+(s-u)_+^{d-1} + c_-(u-s)_+^{d-1})\, \mathrm{d}s \Big\} Z_\alpha(\mathrm{d}u) \tag{1.4}$$

по устойчивой мере $Z_\alpha(du)$, $x_+^{d-1} := x^{d-1}(x > 0), := 0(x < 0)$. Процесс $J_{\alpha,d}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ называется линейным дробным устойчивым движением. Известно, что процесс $J_{\alpha,d}(t)$ имеет п.н. непрерывные траектории, α-устойчивые конечномерные распределения, стационарные приращения и является автомодельным с параметром $H = d + (1/\alpha)$ (см. [9]).

Сходимость сумм линейных процессов (1), при условии, что иновациями процесса X_t являются последовательность мартингал-разностей с конечными вторыми моментами рассматривалось в [10]. Аналог последнего результата, при условии что иновации процесса X_t удовлетворяют условиям центральной предельной теоремы для последовательностей, образующих мартингал-разность (см. [4]), получен в работе [12].

Пусть $\Longrightarrow$ означает слабую сходимость конечномерных распределений, $\overset{D[0,1]}{\Longrightarrow}$ означает слабую сходимость в пространстве Скорохода $\mathrm{D}[0,1]$.

Будем предпологать, что выполнены следующие условия:

(i) $\xi_i, \in \mathbb{R}$ является стационарной (в узком смысле) мартингал-разностью, т.е. $E|\xi_0| < \infty$ и $E[\xi_i|\mathcal{F}_{i-1}] = 0$, $i \in \mathbb{Z}$, где $\mathcal{F}_i$, $i \in \mathbb{Z}$ – семейство σ-алгебр, таких что $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_j$, $i \leqslant j$ и $\sigma\{\xi_s,\ s \leqslant i\} \subset \mathcal{F}_i$, $i \in \mathbb{Z}$;

(ii) Существуют постоянные $\alpha \in (1,2)$, $\beta \in [-1,1]$ и м.м.ф. $\Lambda(x)$, $x \in [1,\infty)$ такие, что

$$D_N^{-1} \sum_{i=1}^{[Nt]} \xi_i \Longrightarrow Z_\alpha(t), \tag{1.5}$$

где $D_N := \Lambda(N)N^{1/\alpha}$, $Z_\alpha(t), t \geqslant 0$ – устойчивый процесс с независимыми и однородными приращениями и характеристическим функционалом

$$Ee^{\mathrm{i}uZ_\alpha(t)} = \exp\big\{ -\mathrm{t}|\mathrm{u}|^\alpha\big(1 - \mathrm{i}\beta\,\mathrm{sgn}(\mathrm{u})\mathrm{tg}(\pi\alpha/2)\big)\big\}, \qquad \mathrm{t} \geqslant 0,\ \mathrm{u} \in \mathbb{R}; \tag{1.6}$$

(iii) Существуют постоянная $0 < C_1 < \infty$ и м.м.ф. $\Lambda_1(x)$ такие, что $\Lambda_1(x)/\Lambda^\alpha(x) \to 1$ $(x \to \infty)$ и $P(|\xi_0| > x) \leqslant C_1\Lambda_1(x)x^{-\alpha}$, $\forall x > 0$.

Основной результат работы – следующая

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii) *и* (1.3). *Тогда*

$$L^{-1}(N)N^{-d}D_N^{-1} \sum_{s=1}^{[Nt]} X_s \overset{D[0,1]}{\Longrightarrow} J_{\alpha,d}(t), \tag{1.7}$$

Из (1.3) вытекает, что $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |b_i| = \infty$. Это указывает на дальний радиус зависимости в последовательности (1.1). Замена условия (1.3) условием $d < 0$ приводит к $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |b_i| < \infty$, т.е. к слабо зависимому случаю, и тогда в теореме 1 следует заменить (1.7) соотношением

$$A^{-1}D_N^{-1} \sum_{s=1}^{[Nt]} X_s \overset{D[0,1]}{\Longrightarrow} Z_\alpha(t), \qquad A := \sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i \neq 0.$$

2. Доказательство теоремы 1.1

Доказательство теоремы основано на схеме ,,дискретных интегралов". Основы схемы изложены в работе [11]. В дальнейшем она была использована в работах [2], [3]. Буквой C будем обозначить разные константы.

Зафиксируем $\epsilon > 0$ Такое, что $1 < \alpha - \epsilon < \alpha + \epsilon < 2$. Положим

$$\xi_{i,N}^{-} := \xi_i I(|\xi_i| < D_N), \quad \xi_{i,N}^{+} := \xi_i I(|\xi_i| \geqslant D_N). \tag{2.1}$$

В силу свойств м.м.ф. и (iii) имеем

$$E|\xi_{i,N}^{-}|^{\alpha+\epsilon} \leqslant C\Lambda_1(D_N)D_N^{\epsilon}, \quad E|\xi_{i,N}^{+}|^{\alpha-\epsilon} \leqslant C\Lambda_1(D_N)D_N^{-\epsilon}. \tag{2.2}$$

Введение случайных величин $\eta_{i,N}^{\pm} := \xi_{i,N}^{\pm} - E[\xi_{i,N}^{\pm}|\mathcal{F}_{i-1}]$ приводит нас к неравенствам

$$E|\eta_{i,N}^{-}|^{\alpha+\epsilon} \leqslant C\Lambda_1(D_N)D_N^{\epsilon}, \qquad E|\eta_{i,N}^{+}|^{\alpha-\epsilon} \leqslant C\Lambda_1(D_N)D_N^{-\epsilon}. \tag{2.3}$$

Заметим, что последовательности $(\eta_{i,N}^{+}, \mathcal{F}_i)$, $(\eta_{i,N}^{+}, \mathcal{F}_i)$ являются мартингал-разностями, поэтому к ним применимо неравенство Бэара–Эссеена:

$$E\left|\sum_{i=1}^{n} g_i\eta_{i,N}^{+}\right|^r \leqslant 2\sum_{i=1}^{n}|g_i|^r E|\eta_{i,N}^{+}|^r, \quad E\left|\sum_{i=1}^{n} g_i\eta_{i,N}^{-}\right|^r \leqslant 2\sum_{i=1}^{n}|g_i|^r E|\eta_{i,N}^{-}|^r, \tag{2.4}$$

где $1 \leqslant r \leqslant 2$, $g_i, i \in \mathbb{Z}$ – действительные числа.

Пусть $||f||_\alpha := (\int |f(x)|^\alpha \, \mathrm{d}x)^{1/\alpha}$. Будем использовать обозначение $L^{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R})$ для банахова пространства измеримых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с нормой $||f||_{\alpha,\epsilon} := \max(||f||_{\alpha-\epsilon}, ||f||_{\alpha+\epsilon})$. Если функция $f \in L^{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R})$ принимает постоянные значения на интервалах $[i/N, (i+1)/N)$, $i \in \mathbb{Z}$, то будем писать $f \in L_N^{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R})$.

Дискретным стохастическим интегралом функции $f \in L^{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R})$ по семейству $(\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ будем называть сумму

$$I(f, N) := D_N^{-1} \sum_{i\in\mathbb{Z}} f(i/N)\xi_i. \tag{2.5}$$

Используя (2.3) и (2.4) можно вывести, что для любой функции $f \in L_N^{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R})$, неравной нулю всюду, за исключением конечного числа интервалов $[i/N, (i+1)/N)$, имеет место неравенство

$$E|I(f, N)|^{\alpha-\epsilon} \leqslant C||f||_{\alpha,\epsilon}^{\alpha-\epsilon}, \tag{2.6}$$

где постоянная C не зависит от N и f. Пусть $f \in L^{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R})$. Через $I(f)$ обозначим стохастический интеграл $\int f(u)Z_\alpha(\,\mathrm{d}u)$. Хорошо известно, что (см. [9])

$$E|I(f)|^{\alpha-\epsilon} \leqslant C||f||_{\alpha,\epsilon}^{\alpha-\epsilon}, \tag{2.7}$$

Лемма 2.1. *Пусть* $\|f_N - f\|_{\alpha,\epsilon} \to 0$, *где* $f_N \in L^{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R})$, $f \in L^{\alpha,\epsilon}(\mathbb{R})$, $N \geqslant 1$. *Тогда* $I(f, N) \Longrightarrow I(f)$.

Доказательство. Лемма доказывается опираясь на соотношение (ii) и неравенства (2.6), (2.7) (см. [2], [10]).

Положим $J_N(t) := L^{-1}(N)N^{-d}D_N^{-1}\sum_{s=1}^{[Nt]} X_s$.

Лемма 2.2. $J_N(t) \Longrightarrow J_{\alpha,d}(t)$.

Доказательство. Докажем лемму для одномерных распределений при $t = 1$. Общий случай доказывается аналогичным образом. Положим

$$f_N(i/N) := \frac{1}{L(N)N^d}\sum_{s=1}^{N}\bigl(c_+L(s-i)(s-i)_+^{d-1} + c_-L(i-s)(i-s)_+^{d-1}\bigr), \quad i\in\mathbb{Z},$$

$$f(u) := \int_0^1 (c_+(s-u)_+^{d-1} + c_-(u-s)_+^{d-1})\,\mathrm{d}s, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Тогда $J_N(1) = I(f_N, N)$, $J_{\alpha,d}(1) = I(f)$. Воспользовавшись [2], [3], нетрудно убедится, что $\|f_N - f\|_{\alpha,\epsilon} \to 0$. Остается сослатся на лемму 2.1.

Лемма 2.3. *Пусть* $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$. *Тогда*

$$E|J_N(t_2) - J_N(t_1)|^{\alpha-\epsilon} \leqslant C|t_2 - t_1|^{1+\delta}, \tag{2.8}$$

где $\delta > 0$.

Доказательство. Для доказательства этой леммы, достаточно доказать (2.8) для $t_k = j_k/N$, $j_k = 1, 2, \ldots, k = 1, 2$. Учитывая стационарность последовательности $\{X_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, неравенство (2.8) следует из

$$E|J_N(j/N)|^{\alpha-\epsilon} \leqslant C(j/N)^{1+\delta}. \tag{2.9}$$

Пусть

$$f_{N,j}(i/N) := A_N^{-1}\sum_{s=1}^{j} b_{s-i}, \qquad A_N := L(N)N^d.$$

Тогда $J_N(j/N) = I(f_{N,j}, N)$. Согласно уже доказанной леммы 2.1, из

$$\|f_{N,j}\|_{\alpha,\epsilon}^{\alpha-\epsilon} \leqslant C(j/N)^{1+\delta} \tag{2.10}$$

следует (2.9). Доказательство (2.10) аналогично доказательству неравенства (41) [1], нужно использовать свойства м.м.ф. и неравенства

$$N^{-d(\alpha-\epsilon)}\sum_{i\leqslant 0}\left|\sum_{s=1}^{j}(s-i)^{d-1}\right|^{\alpha-\epsilon} \leqslant Cj^{\alpha-\epsilon},$$

$$N^{-d(\alpha-\epsilon)} \sum_{i=0}^{j-1} \left| \sum_{s=i+1}^{j} (s-i)^{d-1} \right|^{\alpha-\epsilon} \leqslant Cj^{\alpha-\epsilon},$$

где постоянная C не завист от N и j.

Из лемм 2.2 и 2.3 следует, что выполняются условия теоремы 15.6 [4], т.е. имеет место сходимость (1.7).

Автор выражает благодарность Д. Сургайлису за постановку задачи, советы и замечания.

Литература

[1] А. Астраускас, Предельные теоремы для сумм линейно порожденных случайных величин, *Liet. matem. rink.*, **23**(2), 3–12 (1983).

[2] А. Астраускас, О предельных теоремах для форм от линейных процессов, *Liet. matem. rink.*, **23**(4), 4–11 (1983).

[3] F. Avram, M.S. Taqqu, Weak convergence of moving averages with infinite variance, in: *Dependence in Probability and Statistics*, Birkhauser, Boston (1986), pp. 399–415.

[4] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York (1968).

[5] R. Davis, S. Resnick, Limit theory for moving averages of random variables with regularly varying tail probabilities, *The Ann. of Prob.* (1985).

[6] Ю.А. Давыдов, Принцип инвариантности для стационарных процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, **XV**, 498–509 (1970).

[7] В.В. Городецкий, О сходимости к полуустойчивым гауссовским процессам, *Теория вероятн. и ее примен.*, **XXII**, 513–522 (1977).

[8] M. Maejima, On class of self-similar processes, *Z. Wahrs.verw.Geb.*, **62**, 235–245 (1983).

[9] G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable non-Gausian Random Processes: Stochastc Models with Infinite Variance*, Chapman&Hall, New York (1994).

[10] D. Surgalis, M. Vaičiulis, Convergence of Appell polynomials of long range dependent moving averages in martingale differences, *Acta Appl. Math.*, **58**, 343–357 (2001).

[11] Д. Сургайлис, О зонах притяжения автомодельных кратных интегралов, *Liet. matem. rink.*, **22**(3), 185–201 (1982).

[12] Q. Wang, Y.-X. Lin, C.M. Gulati, Asymptotics for moving average processes with dependent innovations, *Statistics & Probability Letters*, **54**, 347–356 (2001).

Tiesinių procesų su martingaliniais triukšmais ir begaline dispersija konvergavimas

M. Vaičiulis

Nagrinėjamas šliaužiančio vidurkio proceso X_t, kurio inovacijos $\{\xi_i\}$ yra martingalinių skirtumų su begaline dispersija seka, dalinių sumų konvergavimas. Įrodyta, kad ribinis yra trupmeninis tiesinis Lévy procesas.