Liet. matem. rink., T. 43, spec. nr., 32–34

Hurwitz'o dzeta funkcijos aproksimavimas baigtine suma *

Ramūnas GARUNKŠTIS
e-mail: ramunas.garunkstis@maf.vu.lt

Tegu $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Hurwitz'o dzeta funkcija $\zeta(s,\alpha)$, kai $\sigma > 1$, apibrėžiama Dirichlet eilute

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s},$$

čia parametras $0 < \alpha \leqslant 1$. Ši funkcija analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuriame turi paprastą polių. Voronino ir Karacubos monografijoje ([3], 3.2 skyrius) (taip pat žr. [2], 3.1 skyrius) įrodyta, kad jei $0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 2$ ir $\pi x \geqslant |t| \geqslant 2\pi$, tai

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{0 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{(n+\alpha)^s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + \mathrm{O}(x^{-\sigma}),$$

kur konstanta ženkle O priklauso tik nuo σ_0. Mūsų tikslas parodyti, kad pastaroji formulė galioja visame intervale $0 \leqslant \sigma \leqslant 2$ ir suskaičiuoti konstantą ženkle O.

Apibrėžkime žymėjimą $\Theta(\alpha)$, reiškiantį tam tikrą kompleksinį skaičių, moduliu nedidesnį negu $|\alpha|$. Pavyzdžiui, $f(s) = \Theta(g(s))$, kai $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ reiškia kad $|f(s)| \leqslant |g(s)|$ juostoje nuo σ_1 iki σ_2.

Theorem. *Tegu $\sigma \geqslant 0$ ir $|t| \leqslant \pi x$. Tuomet*

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{0 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{(n+\alpha)^s} + \frac{(x+\alpha)^{1-s}}{s-1} + \Theta\left(\frac{7\sqrt{2}\pi^{-1}+3}{x^\sigma}\right).$$

Teoremos įrodymui bus naudinga tolimesnė lema.

Lemma. *Tegu $f(x)$ yra reali intervale $[a,b]$ funkcija. Tegu $f'(x)$ yra tolydi ir monotoniška intervale $[a,b]$ bei $|f'(x)| \leqslant \delta < 1$. Tuomet*

$$\sum_{a<n\leqslant b} e\left(f(n)\right) = \int_a^b e\left(f(x)\right)\,\mathrm{d}x + \Theta\left(\frac{4\sqrt{2}\delta}{\pi(1-\delta)} + \frac{6\sqrt{2}\delta}{\pi} + 3\right).$$

*Darbas remiamas Lietuvos mokslo ir studijų fondo

Čia $e(x) = e^{2\pi i x}$.

Įrodymas. Tai gerai žinomas klasikinis teiginys. Tokiu pavidalu, kaip suformuluota čia, įrodymą galima rasti straipsnyje [1].

Teoremos įrodymas. Kai $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$ tai (Voronin ir Karacuba [3], 1.4 skyrius, Lema 3),

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+\alpha)^s} + \frac{1}{s-1}\left(N+\frac{1}{2}+\alpha\right)^{1-s} + s\int_{N+1/2}^{\infty} \frac{1/2-\{u\}}{(u+\alpha)^{s+1}}\,\mathrm{d}u.$$

Šioje lygybėje paskutinis dėmuo savo absoliučiu dydžiu yra nedidesnis už $\frac{|s|}{\sigma_0}N^{-\sigma_0}$. Apibrežkime

$$A(u) = \sum_{x<n\leqslant u} (n+\alpha)^{-it}.$$

Taikome Lemą, kai $f(x) = (2\pi)^{-1} t \log(x+\alpha)$, $\delta = \frac{1}{2}$ ir $x \geqslant |t|/\pi$. Tuomet

$$A(u) = \frac{(u+\alpha)^{1-it} - (x+\alpha)^{1-it}}{1-it} + \Theta\left(\frac{7\sqrt{2}}{\pi}+3\right).$$

Kai $x \leqslant N$, sumuodami dalimis, gauname

$$\begin{aligned}\sum_{x<n\leqslant N+1/2} (n+\alpha)^{-s} &= \sigma\int_x^{N+1/2} \frac{A(u)\,\mathrm{d}u}{(u+\alpha)^{\sigma+1}} + \frac{A(N+1/2)}{(N+1/2+\alpha)^{\sigma}} \\ &= \frac{(N+1/2+\alpha)^{1-s}}{1-s} - \frac{(x+\alpha)^{1-s}}{1-s} \\ &\quad +\Theta\left(\frac{7\sqrt{2}\pi^{-1}+3}{x^{\sigma}}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{x}{N^{\sigma}}\right), \quad N\to\infty.\end{aligned}$$

Iš šios ir (1) lygybių, paleidę N į begalybę, gauname teoremos tvirtinimą atveju $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$. Kadangi σ_0 galime pasirinkti kaip norima mažą, o paklaidos narys išlieka aprėžtas σ_0 artėjant prie 0 ir kadangi funkcija $\zeta(s,\alpha)$ yra tolydi nagrinėjamoje srityje, tai teoremos tvirtinimas išlieka teisingas visiem $\sigma \geqslant 0$. Tuo teorema įrodyta.

References

[1] R. Garunkštis, The effective universality theorem for the Riemann zeta function, *Proceedings of the Session "Analytic Number Theory and Diophantine Equations"*, Max-Planck-Institut fuer Mathematik (to appear).

[2] R. Garunkštis, A. Laurinčikas, *The Lerch Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers (2002).
[3] A.A. Karatsuba, S.M. Voronin, *The Riemann Zeta-Function*, De Gruyter Expositions in Mathematics, **5**, Berlin (1992).

An approximation of the Hurwitz zeta function by a finite sum

R. Garunkštis

We obtain the following version of the approximation of the Hurwitz zeta-function. Let $\sigma \geqslant 0$ and $|t| \leqslant \pi x$. Then

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{0 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{(n+\alpha)^s} + \frac{(x+\alpha)^{1-s}}{s-1} + \Theta\left(\frac{7\sqrt{2}\pi^{-1}+3}{x^\sigma}\right).$$