Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 817–820

Асимптотический вид моментов процесса востановления

Вайдотас КАНИШАУСКАС (ŠU)
e-mail: mat.kat@fm.su.lt

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задан считающий процесс $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1(T_n \leqslant t)$, $t \geqslant 0$, у которого случайные моменты $X_n = T_n - T_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, $(T_0 = 0)$ независимые и одинакого распределенные. Будем считать, что функция распределения $F(t) = P(X_1 \leqslant t)$, $t \geqslant 0$, принадлежит классу V_α, $0 \leqslant \alpha < 1$, т.е. для нее существует медленно меняющаяся функция $L(t)$ такая, что $1 - F(t) \sim t^{-\alpha} L(t)$, при $t \to \infty$, где $\sim$ обозначает эквивалентность. Напомню, что для медленно меняющихся функций $L(t)$ имеет место $\lim_{t\to\infty} \frac{L(xt)}{L(t)} = 1$, $x > 0$.

По определению

$$L_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n^r P\big(N(t) = n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} n^r \big(F_n(t) - F_{n+1}(t)\big), \tag{1}$$

где $F_n(t) = P(T_n \leqslant t)$, $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $r \in N_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$, тогда $L_r(t)$ является решением интегрального уравнения*

$$\begin{aligned} L_r(t) - L_r * F(t) &= C_r^1(-1)^2 L_{r-1}(t) + C_r^2(-1)^3 L_{r-2}(t) \\ &+ \dots + C_r^2(-1)^{r-1} L_2(t) + C_r^1(-1)^r L_1(t) + (-1)^{r+1} F(t), \end{aligned} \tag{2}$$

где $L * F(t) = \int_0^t L_r(t-u)\mathrm{d}F(u)$, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Следствие. Пусть $l_r(t) = \frac{\mathrm{d}L_r(t)}{\mathrm{d}t}$, а

$$l_r(t) \xrightarrow{L} l_r(p) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} l_r(t)\mathrm{d}t, \quad p \geqslant 0,$$

трансформация Лапласса для функции $l_r(t)$. Тогда $l_r(p)$ является решением алгебрического уравнения

$$\begin{aligned} l_r(p)(1 - f(p)) &= C_r^1(-1)^2 l_{r-1}(p) + C_r^2(-1)^3 l_{r-2}(p) \\ &+ \dots + C_r^2(-1)^{r-1} l_2(p) + C_r^1(-1)^r l_1(t) + (-1)^{r+1} f(p), \end{aligned} \tag{3}$$

где $f(p)=\int_0^\infty e^{-pt}p(t)dt$, а $p(t)=F'(t)$ – функция плотности.

Доказательство. Пусть $r \geqslant 27$. Для $L_r(t)$ применяем формулу

$$(a-b)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a^{n-k}b^k.$$

Имеем

$$L_r(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n^rF_n(t)-\sum_{n=1}^{\infty}((n+1)-1)^rF_{n+1}(t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n^rF_n(t)-\sum_{n=2}^{\infty}n^rF_n(t)+C_r^1(-1)^2\sum_{n=2}^{\infty}n^{r-1}F_n(t)$$

$$+C_r^2(-1)^3\sum_{n=2}^{\infty}n^{r-2}F_n(t)+\cdots+C_r^2(-1)^{r-1}\sum_{n=2}^{\infty}n^2F_n(t)$$

$$+C_r^1(-1)^r\sum_{n=2}^{\infty}nF_n(t)+(-1)^{r+1}\sum_{n=2}^{\infty}F_n(t).$$

Заметим, что

$0=(1-1)^r=(-1)^0C_r^0+(-1)^1C_r^1+(-1)^2C_r^2+\ldots+(-1)^{r-1}C_r^{r-1}+(-1)^rC_r^r.$

В силу этого

$$L_r(t)=C_r^1(-1)^2\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-1}F_n(t)+C_r^2(-1)^3\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}F_n(t)+\cdots$$

$$+C_r^2(-1)^{r-1}\sum_{n=1}^{\infty}n^2F_{n+1}(t)+C_r^1(-1)^r\sum_{n=1}^{\infty}nF_{n+1}(t)+(-1)^{r+1}\sum_{n=1}^{\infty}F_{n+1}(t). \quad (4)$$

Символически (4) умножая на $*F(t)$ получаем

$$L_r*F(t)=C_r^1(-1)^2\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-1}F_{n+1}(t)+C_r^2(-1)^3\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-2}F_{n+1}(t)+\cdots$$

$$+C_r^2(-1)^{r-1}\sum_{n=1}^{\infty}n^2F_{n+1}(t)+C_r^1(-1)^r\sum_{n=1}^{\infty}nF_{n+1}(t)+(-1)^{r+1}\sum_{n=1}^{\infty}F_{n+1}(t). \quad (5)$$

Учитывая (1) из (4) вычитая (5) получаем (2). Заметим, что при $r=1$ формула (2) тоже верна и имеет вид

$$L_1(t)-L_1*F(t)=F(t).$$

Теорема доказана.

Следствие теоремы вытекает из (2) учитывая такие свойства трансформации Лапласса:

$$L_r * F(t) = \int_0^t L_r(t-u)p(u)\mathrm{d}u = L_r(p)f(p),$$

$$F(t) = \int_0^t p(x)\mathrm{d}x \xrightarrow{L} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}F(t)\mathrm{d}t = \frac{f(p)}{p},$$

где $L_r(p) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}L_r(t)\mathrm{d}t$, $f(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}p(t)\mathrm{d}t$.

ТЕОРЕМА 2. *При* $r \in N_+$ *существует предел*

$$\lim_{p\to 0+} l_r(p)\big(1-f(p)\big)^r = r! \tag{6}$$

Доказательство. Используя математическую индукцию докажем аналогичную (6) формулу

$$l_r(p) \sim \frac{r!}{(1-f(p))^r}, \quad p \to 0+. \tag{7}$$

Пусть $r = 1$. Тогда

$$l_1(p) = \frac{f(p)}{1-f(p)} = \frac{1-p\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}(1-F(t))\mathrm{d}t}{1-f(p)} \sim \frac{1}{1-f(p)}, \quad p \to 0+.$$

Значит (7) верна при $r = 1$. Далее делаем предположение, что (7) верна когда вместо r имеем $r-1, r-2, \ldots, 2, 1$. Тогда учитывая (3) имеем

$$\begin{aligned}
l_r(p)(1-f(p)) &\sim \frac{C_r^1(r-1)!(-1)^2}{(1-f(p))^{r-1}} + \frac{C_r^2(r-2)!(-1)^3}{(1-f(p))^{r-2}} + \cdots \\
&+ \frac{C_r^2 2!(-1)^{r-1}}{(1-f(p))^2} + \frac{C_r^1 1!(-1)^r}{1-f(p)} + (-1)^{r+1}f(p) \\
&= (1-f(p))^{1-r}\big(C_r^1(r-1)!(-1)^2 + C_r^2(r-2)!(-1)^3(1-f(p)) + \cdots \\
&+ C_r^2 2!(-1)^{r-1}(1-f(p))^{r-3} + C_r^1(-1)^r(1-f(p))^{r-2} + (-1)^{r+1}(1-f(p))^{r-1} \\
&\sim \frac{r(r-1)!}{(1-f(p))^{r-1}} = \frac{r!}{(1-f(p))^{r-1}} \quad p \to 0+.
\end{aligned}$$

Здесь воспользовались соотношением

$$1-f(p) = p\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}(1-F(t))\mathrm{d}t \to 0, \quad p \to 0+.$$

Формула (7) и теорема доказана.

ЛЕММА 1 [1]. *Пусть* $F(t) \in V_\alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$. *Тогда*

$$\int_0^\infty e^{-pt}(1 - F(t))dt \sim p^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)L(p^{-1}), \quad p \to 0+.$$

$$1 - f(p) \sim p^\alpha \Gamma(1-\alpha)L(p^{-1}), \quad p \to 0+, \tag{8}$$

где $\Gamma(a)$ – *Гамма функция.*

Для (7) применяя (8) имеем

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $r \in N_+$ *и* $F(t) \in V_\alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$. *Тогда*

$$l_r(p) \sim r!p^{-\alpha r}\Gamma^{-r}(1-\alpha)L^{-r}(p^{-1}), \quad p \to 0+.$$

Заметим, что $L^{-r}(t)$ *тоже медленно меняющаяся функция.*

ЛЕММА 2 [1]. *Пусть* $G(t)$, $t \geqslant 0$, – *положительная монотонная и непрерывная справа функция, а* $g(p)$ – *трансформация Лапласса для* $G'(t)$. *Если*

$$g(p) \sim p^{-\beta}L(p^{-1}), \quad p \to 0+,$$

то

$$G(t) \sim t^\beta \Gamma^{-1}(\beta+1)L(t), \quad t \to \infty.$$

Имеет место и обратное утверждение.

Учитывая лемму 2 и теорему 3 получаем главный результат работы.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $F(t) \in V_\alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$. *Тогда*

$$L_r(t) \sim r!t^{r\alpha}\Gamma^{-r}(1-\alpha)L^{-r}(t)\Gamma^{-1}(r\alpha+1), \quad t \to \infty.$$

Пример. $F(t) = 1 - \frac{1}{t^\alpha}L(t)$, $L(t) = 1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

Тогда

$$L_r(t) \sim \frac{r!t^{\frac{r}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{r}{2}+1)(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2})^r}.$$

Литература

1. J.L. Teugels, Renewal theorems when the first or the second moment is infinite, *The Annals of Mathematical Statistics*, **39**, 1210–1219 (1968).

REZIUMĖ

V. Kanišauskas. Atstatymo proceso momentų asimptotinis pavidalas

Darbe gautos atstatymo proceso bet kurios eilės momento integralinės lygtys ir šių momentų asimptotika, kai $t \to \infty$, kada tarpiniai atstatymo momentai neturi baigtinių pirmų momentų.