Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 808–811

Nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių maksimumo skirstinio asimptotika

Arvydas JOKIMAITIS (KTU)
el. paštas: arvydas.jokimaitis@ktu.lt

Tarkime, kad $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių, turinčių skirstinio funkcijas

$$F_j(x) = P(X_j < x), \quad \forall j \geqslant 1,$$

seka. Apibrėžkime šių atsitiktinių dydžių sekos pirmųjų n narių maksimumą:

$$Z_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Pažymėkime

$$m_n(x) = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \bigl(1 - F_j(\alpha_n + \beta_n x)\bigr),$$

$$M_n(x) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \bigl(1 - F_j(\alpha_n + \beta_n x)\bigr),$$

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \bigl(1 - F_j(\alpha_n + \beta_n x)\bigr);$$

čia ir $\{\beta_n > 0\}$ – centravimo ir normavimo konstantų sekos.

Tarkime, kad tenkinama sąlyga

$$\lim_{n\to\infty} M_n(x) = 0 \quad \forall x.$$

Tada (žr. [2], [3]), kad tiesiškai normuoto maksimumo $(Z_n - \alpha_n)/\beta_n$ skirstinys silpnai konverguotų į neišsigimusį ribinį skirstinį $H(x)$, būtina ir pakankama, jog būtų tenkinama sąlyga

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x);$$

be to ribinis skirstinys $H(x) = \mathrm{e}^{-u(x)}$.

Šiame darbe gausime tiesiškai normuoto maksimumo skirstinio įvertį. Pastebėsime, kad nepriklausomų nevienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių ekstremaliųjų reikšmių skirstinių konvergavimo greitis yra tirtas [1] darbe.

TEOREMA. *Tarkime, kad*

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n < \alpha_n + \beta_n x) = H(x) = \mathrm{e}^{-u(x)}.$$

Su visais x, su kuriais $M_n(x) \leqslant 1/2$, teisingas dėstinys

$$P(Z_n < \alpha_n + \beta_n x) = \mathrm{e}^{-u_n(x)}\big(1 - R_n(x)\big);$$

čia

$$\frac{1/2 m_n(x) u_n(x)}{1 + M_n(x) u_n(x)} \leqslant R_n(x) \leqslant M_n(x) u_n(x).$$

Teoremos įrodymas. Turime

$$P(Z_n < \alpha_n + \beta_n x) = \prod_{j=1}^{n} F_j(\alpha_n + \beta_n x) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} \ln\Big(-\big(1 - F_j(\alpha_n + \beta_n x)\big)\Big)\right\}.$$

Logaritmą skleisdami Teiloro eilute, gauname

$$P(Z_n < \alpha_n + \beta_n x) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \frac{(1 - F_j(\alpha_n + \beta_n x))^k}{k}\right\}.$$

Pažymėję

$$L_n(x) = \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \frac{(1 - F_j(\alpha_n + \beta_n x))^k}{k},$$

gauname

$$P(Z_n < \alpha_n + \beta_n x) = \mathrm{e}^{-u_n(x) - L_n(x)}.$$

Iš čia gauname

$$P(Z_n < \alpha_n + \beta_n x) = \mathrm{e}^{-u_n(x)}\big(1 - R_n(x)\big); \tag{1}$$

čia

$$R_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-L_n(x)}. \tag{2}$$

Įvertindami narį $R_n(x)$, naudosime nelygybes

$$\frac{t}{1+t} \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-t} \leqslant t,$$

teisingas su visais $t \geqslant 0$.

Iš pradžių rasime įvertį iš viršaus. Atsižvelgę į teoremos sąlygą $M_n(x) \leqslant 1/2$, gauname

$$R_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-L_n(x)} \leqslant L_n(x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \big(1 - F_j(\alpha_n + \beta_n x)\big)^2 \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{16} + \dots\Big)$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \bigl(1 - F_j(\alpha_n + \beta_n x)\bigr)^2 \leqslant M_n(x) u_n(x). \tag{3}$$

Dabar gausime įvertį iš apačios:

$$R_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-L_n(x)} \geqslant \frac{L_n(x)}{1 + L_n(x)}$$

$$\geqslant \frac{1/2 \sum_{j=1}^{n} (1 - F_j(\alpha_n + \beta_n x))^2}{1 + M_n(x) u_n(x)} \geqslant \frac{1/2 m_n(x) u_n(x)}{1 + M_n(x) u_n(x)}. \tag{4}$$

Atsižvelgę į (3) ir (4) nelygybes, gauname nario $R_n(x)$ įvertį. Tada iš (1) lygybės išplaukia teoremos teiginys.

Išvada. Pažymėkime

$$\rho_n(x) = u_n(x) - u(x).$$

Tada

$$P(Z_n < \alpha_n + \beta_n x) = H(x) \mathrm{e}^{-\rho_n(x)} \bigl(1 - R_n(x)\bigr).$$

Kai kurių skirstinių atveju centravimo ir normavimo konstantas galima parinkti taip, kad $\rho_n(x) \equiv 0$; tada

$$P(Z_n < \alpha_n + \beta_n x) = H(x) \bigl(1 - R_n(x)\bigr).$$

Pavyzdys. Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $\{X_n, n \geqslant 1\}$ turi Pareto skirstinius su parametrais λ_j, t.y.,

$$F_j(x) = 1 - \frac{\lambda_j}{x}, \quad x \geqslant \lambda_j > 0.$$

Parinkę centravimo ir normavimo konstantas

$$\alpha_n = 0, \quad \beta_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

gauname

$$u_n(x) = \frac{1}{x}, \quad M_n(x) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{\lambda_j}{x \sum_{i=1}^{n} \lambda_i}, \quad m_n(x) = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{\lambda_j}{x \sum_{i=1}^{n} \lambda_i}.$$

Jei parametrai $\{\lambda_j\}$ tenkina sąlygą

$$\lim_{n \to \infty} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = 0,$$

tai $\lim_{n \to \infty} M_n(x) = 0$, ir

$$\lim_{n \to \infty} P(Z_n < \alpha_n + \beta_n x) = H(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, \quad x > 0.$$

Kadangi šiuo atveju $\rho_n(x) \equiv 0$, tai, pažymėję

$$C_n^{(2)} = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{\lambda_j}{x \sum_{i=1}^{n} \lambda_i}, \qquad C_n^{(1)} = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{\lambda_j}{x \sum_{i=1}^{n} \lambda_i},$$

gauname tokį maksimumo skirstinio įvertį

$$P(Z_n < \alpha_n + \beta_n x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\big(1 - R_n(x)\big),$$

čia

$$\frac{C_n^{(1)}}{2x^2 + 2C_n^{(2)}} \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{C_n^{(2)}}{x^2}.$$

Literatūra

1. A. Aksomaitis, Non-uniform estimate of the rate of convergence in a limit theorem for max-scheme, *Liet. matem. rink.*, **28**, 211–215 (1988).
2. В.М. Золотарев, *Современная теория суммирования независимых случайных величин*, Наука, Москва (1986).
3. Е. Панчева, Общие предельные теоремы для максимума независимых случайных величин, *Теория вероятн. и ее примен.*, **31**, 730–744 (1986).

SUMMARY

A. Jokimaitis. The asymptotic of the distribution of the maxima of the nonidentically distributed random variables

In this paper the nonuniform estimate for the distribution of the maxima of the nonidentically distributed independent random variables is obtained.

Keywords: extreme values, limit distributions, asymptotic of the extreme values distributions.