*Liet. matem. rink.*, **44**, *spec. nr.*, 2004, 612–619

# Stochastinio sklaidos parametro įtaka įkainojant pasirinkimo sandorius

Akvilina VALAITYTĖ, Eimutis VALAKEVIČIUS (KTU)
el. paštas: akvilina.v@delfi.lt, eimval@fmf.ktu.lt

## 1. Įvadas

Viena iš svarbiausių problemų finansų matematikoje yra sukurti tinkamą finansų aktyvų (akcijų, akcijų indeksų, palūkanų normų, valiutų kursų ir pan.) kainų dinamikos modelį. Kainų dinamika atspindi atsitiktinį aktyvų vertės kitimą laike. Daugelis autorių [1, 2] mano, kad atsitiktinis kainų elgesys susijęs su efektyviosios rinkos hipoteze (ERH). Ši hipotezė teigia, kad praeities informacija apie finansų rinkas visiškai atsispindi esamosiose finansinių aktyvų kainose ir kad rinkos akimirksniu reaguoja į naują informaciją apie aktyvus. Iš šių prielaidų išplaukia, kad aktyvų kainų atsitiktinį kitimą galima aprašyti Markovo procesu. Turint kainų dinamikos modelį, galima:

- teoriškai įkainoti pasirinkimo sandorius (*option*), išankstinius bei ateities sandorius (*futures*) ir kitus išvestinius vertybinius popierius( *derivative securities*);
- įvertinti riziką, susietą su rizikingų vertybinių popierių portfelio turėjimu bei ją valdyti.

Klasikinis būdas aprašyti kainų dinamiką yra kiekvienam aktyvui apibrėžti difuzinį procesą, t.y., stochastinį integralą arba stochastinę diferencialinę lygtį, kai atsitiktinumas yra valdomas Vinerio procesu. Labiausiai tikėtina, kad Vinerio proceso platus panaudojimas, aprašant finansinių aktyvų kainų dinamiką, susijęs su galimybe gauti analizines raiškas. Paprastų išvestinių vertybinių popierių kainos išreiškiamos per Gauso skirstinį ir lengvai skaičiuojamos.

Pastaraisiais metais vis didesnį dėmesį tyrėjai skiria stochastiniams modeliams, besiskiriantiems nuo klasikinių difuzinių modelių. Empiriniai tyrimai parodė, kad Vinerio procesas ne visiškai adekvačiai aprašo kainų atsitiktinį procesą ir kad dispersijos bei kovariacijos nėra pastovios kintant laikui. Norint teisingai įkainoti išvestinius vertybinius popierius ar valdyti riziką, reikia giliau suvokti aktyvų kainų dinamiką ir jai būdingus bruožus. Apžvelgus užsienio autorių publikacijas, buvo išskirtos tokios kainų dinamikos empirinės savybės: skirstiniai turi „sunkias uodegas“, pasitaiko kainų sklaidos klasteriai, retkarčiais būna dideli kainų šuoliai, dažnai nepasitvirtina prielaidos apie Gauso skirtinį ir modelio parametrai dažniausiai nėra pastovūs.

Šiame straipsnyje pateikiami keli klasikiniai modeliai, aprašantys kainų dinamiką bei išanalizuoti stochastinio sklaidos parametro (*volatility*) modeliai, panaudojant Vilniaus banke prekiaujamų EUR/USD kurso pasirinkimo sandorių duomenis.

## 2. Akcijos kainos stochastinis procesas

Aktyvų kainų modeliavimas siejasi su naujos informacijos, kuri įtakoja kainas, modeliavimu. Priklausomai nuo to, kokie įvykiai pasirodo „normalūs“ ar „reti“, išskiriami pagrindiniai dviejų tipų tolydžiojo laiko kainų kitimo modeliai. Neftci [3] teigia, kad pagrindinį skirtumą tarp „normalių“ ir „retų“ įvykių elgesio apibūdina proceso šuolių dydžiai, susieti su tam tikrais įvykiais ir jų pasirodymo tikimybėmis. Jei finansų rinkoje dominuoja „normalūs“ įvykiai, tai galima panaudoti Vinerio procesą, t.y., kainų procesas aprašomas tolydžiuoju stochastiniu procesu, kai ekstremalios reikšmės pasirodo labai retai su tikimybėmis normaliojo skirstinio „uodegoje“. Aktyvo grąžos difuzinis procesas aprašomas tokia stochastine diferencialine lygtimi:

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t\,\mathrm{d}t + \sigma S_t\,\mathrm{d}W_t,$$

čia $S_t$ – esamoji aktyvo kaina; $\mu$ – pastovusis trendo parametras; $\sigma$ – pastovusis sklaidos parametras; $W_t$ – standartinis Vinerio procesas. Šis procesas turi tolydžiąją realizaciją, todėl negalimi trūkiai ir šuoliai, kai pasirodo reti įvykiai su dideliais kainų šuoliais. Tokiais atvejais yra naudojamas Puasono procesas, t.y., aktyvų kainų dinamika modeliuojama kaip difuzinio ir Puasono procesų suma. Šiuo atveju aktyvo kainos $S_t$ stochastinė diferencialinė lygtis turi pavidalą

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t\,\mathrm{d}t + \sigma S_t\,\mathrm{d}W_t + bS_t\sum_{j=1}^{N_t}(Y_j - 1)$$

su tokiais papildomais dydžiais: $Y_j - 1$ – lognormaliai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, atspindintys šuolio dydį; $N_t$ – šuolių intervale $(0, t)$ skaičius, pasiskirstęs pagal Puasono dėsnį su parametru $\lambda t$, $b$ – konstanta. Pastarojo tipo modeliai žymiai adekvačiau aprašo finansų rinkas, tačiau jie yra rečiau naudojami, negu grynai difuziniai procesai, nes sudėtinga įvertinti modelio parametrus.

## 3. Stochastinio sklaidos parametro modeliai

Empiriškai nustatyta, kad sklaidos parametras $\sigma$ yra atsitiktinis dydis. Neatitikimas tarp Black–Scholes modeliu apskaičiuotų pasirinkimo sandorių kainų ir jų rinkos kainų paskatino kurti ir plėtoti stochastinio sklaidos parametro modelius. Tarkime, kad vertybinių popierių kaina $S$ kinta pagal Vinerio procesą su trendo parametru $\mu$ ir sklaidos parametru $\sigma$, kurie priklauso nuo stochastinio proceso $\upsilon$ [7]. Tada,

$$\mathrm{d}S_t = \mu(S_t, \upsilon_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(S_t, \upsilon_t)\,\mathrm{d}W_{St}, \tag{1}$$

$$\sigma\,(S_t, \upsilon_t) = f(\upsilon_t), \tag{2}$$

$$\mathrm{d}\upsilon_t = \alpha(S_t, \upsilon_t)\,\mathrm{d}t + \beta(S_t, \upsilon_t)\,\mathrm{d}W_{\upsilon t}; \tag{3}$$

čia $W_{St}$, $W_{\upsilon t}$ – koreliuotieji Vinerio procesai su koreliacijos koeficientu $\rho$ , t.y.,

$$\mathrm{d}W_{\upsilon t} = \rho\,\mathrm{d}W_{St} + \sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}Z_t; \tag{4}$$

čia $W_{St}$ ir $Z_t$ yra nekoreliuotieji Vinerio procesai [9]. Taigi, stochastiniame sklaidos parametro modelyje yra du atsitiktinumo šaltiniai, kai standartiniame Black–Scholes modelyje yra tik vienas.

Bus tiriami trys skirtingi stochastinio sklaidos parametro modeliai: Hull–White, Heston ir logaritminis Ornstein–Uhlenbeck.

Hull–White modelis [5] yra atskirasis (1)–(4) lygtimis aprašomo modelio atvejis. Taigi,

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t\,\mathrm{d}t + \sigma_t S_t\,\mathrm{d}W_{St}, \qquad \mathrm{d}\upsilon_t = \gamma\upsilon_t\,\mathrm{d}t + \eta\upsilon_t\,\mathrm{d}W_{\upsilon t}; \tag{5}$$

čia $\sigma_t = \sqrt{\upsilon_t}$, $\gamma < 0$, $W_{St}$ ir $W_{\upsilon t}$ yra nekoreliuoti Vinerio procesai. Darbe nagrinėjamas atskiras atvejis, kada sklaidos parametras gali įgyti tik dvi reikšmes. Šiuo atveju pirkimo pasirinkimo sandorio kaina skaičiuojama pagal formulę

$$C_t = \mathrm{E}\Big[C_{BS}\big(t, S, K, T, \sqrt{\overline{\sigma^2}}\big)\big|\upsilon_t = \upsilon\Big], \quad \text{čia } \overline{\sigma^2} = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(\upsilon_x)^2\,\mathrm{d}x,$$

$\upsilon_t$ – dviejų būsenų Markovo procesas [9] ir

$$\overline{\sigma^2} = \begin{cases} \sigma_1^2 & \text{sutikimybe } p, \\ \sigma_2^2 & \text{sutikimybe } 1-p. \end{cases}$$

Heston pasirinkimo sandorių įkainojimo modelis apibrėžiamas tariant, kad $S_t$ ir $\upsilon_t$ tenkina lygtis [8]:

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t\,\mathrm{d}t + \sigma_t S_t\,\mathrm{d}W_{St}, \qquad \mathrm{d}\upsilon_t = \kappa(\theta - \upsilon_t)\,\mathrm{d}t + \eta\sqrt{\upsilon_t}\,\mathrm{d}W_{\upsilon t}; \tag{6}$$

čia $\sigma_t = \sqrt{\upsilon_t}$, $\kappa$ – grįžimo prie vidurkio intensyvumas, $\theta$ – sklaidos parametro vidurkis, $\eta - \sigma_t$ – sklaidos parametras. Tariama, kad parametrai $\kappa, \theta, \eta, \rho$ yra pastovūs.

Ornstein–Uhlenbeck stochastinio sklaidos parametro modelis yra toks:

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t\,\mathrm{d}t + \sigma_t S_t\,\mathrm{d}W_{St}, \qquad \mathrm{d}\upsilon_t = \alpha(\bar{\upsilon} - \upsilon_t)\,\mathrm{d}t + \beta\,\mathrm{d}W_{\upsilon t}; \tag{7}$$

čia $\sigma_t = \exp(\upsilon_t)$. Empiriškai nustatyta, kad $\ln\sigma_t$ kinta pagal Ornstein–Uhlenbeck procesą, su parametrais $\ln\bar{\sigma}$ ir $\alpha > 0$. Paprastai laikoma, kad $\mu, \alpha(\ln\bar{\sigma} - \upsilon_t)$ ir $\beta$ yra konstantos. Darbe nagrinėjamas atvejis, kada $\rho = 0$ [7].

## 4. Stochastinės sklaidos modelių parametrų įverčiai

Stochastinio sklaidos parametro modeliuose parametrų reikšmės įvertinamos remiantis stebėtomis aktyvų ir pasirinkimo sandorių kainomis.

Hull–White modelyje yra trys nežinomi parametrai: $\sigma_1, \sigma_2$ ir $p$. Šie parametrai įvertinami mažiausių kvadratų metodu:

$$\min\sum_{i=1}^{n}\big(C_{\text{rinkos}_i} - C_{\text{modelio}}(\sigma_1, \sigma_2, p, K_i)\big)^2;$$

čia $n$ – vienos dienos prekiautų pasirinkimo sandorių skaičius, $C_{\text{rinkos}_i}$ – $i$-ojo pasirinkimo sandorio rinkos kaina su įvykdymo kaina $K_i$, $C_{\text{modelio}}(\sigma_1, \sigma_2, p, K_i)$ – pasirinkimo sandorio kaina, apskaičiuota pagal Hull–White modelį.

Heston ir logaritminio Ornstein–Uhlenbeck modelio parametrai įvertinami dviejų žingsnių procedūra [8]: netiesioginiu parametrų įvertinimo metodu ir netiesiniu mažiausių kvadratų metodu.

Pirmiausia randamos $\mu, \kappa, \theta, \eta$ reikšmės. Tarkime, kad $\mu = 0$, tada lygtys (6) diskrečiuoju atveju atrodo taip:

$$R_t = \sqrt{\upsilon_t \tau}\varepsilon_{1t}, \quad \upsilon_t = \kappa\theta\tau + (1 - \kappa\tau)\upsilon_{t-\tau} + \eta\sqrt{\upsilon_{t-\tau}\tau}\varepsilon_{2t};$$

čia $R_t$ yra aktyvo kainos grąža, o $\varepsilon_{1t}$ ir $\varepsilon_{2t}$ du koreliuotieji, standartiniai normalieji atsitiktiniai dydžiai. Konstruojamas GARCH(1,1) pagalbinis modelis:

$$R_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \quad h_t = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1};$$

čia $\varepsilon_t$ atsitiktinis dydis pasiskirstęs pagal normalųjį skirstinį su vidurkiu 0 ir dispersija $h_t$. Dėl šio modelio ribotumo, galima įvertinti tik tris parametrus $(\kappa, \theta, \eta)$, o koreliacijos koeficientas prilyginamas nuliui. Pasirinkus parametrus $(\kappa, \theta, \eta)$ ir $\tau$, modeliuojant teorinės grąžos derinamos su empiriniais duomenimis.

Taikant GARCH(1,1) modelį, aktyvo kainų gražų duomenims gaunamas optimalus parametrų įverčių rinkinys $\hat{B} = (\omega, \alpha, \beta)$. Taigi, kiekvienoms modeliuojamoms laiko eilutėms parametrų rinkinys yra žinomas $\Theta = (\kappa, \theta, \eta)$. Toliau apskaičiuojamas vektorius

$$m(\Theta, \hat{B})_{3\times 1} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \frac{\partial l_t(R_t(\Theta)|R_{t-1}(\Theta), B)}{\partial B}\bigg|_{B=\hat{B}}, \quad l_t = -\ln h_t - \frac{R_t^2}{2h_t};$$

čia $R_t(\Theta)$ modeliuojamų aktyvų grąža, $N$ – modeliavimo žingsnių skaičius. Jei $m$ lygus nuliui, tai modeliuojami duomenys turės tuos pačius apskaičiuotus GARCH(1,1) parametrus kaip ir stebėti duomenys. Dažniausiai šis vektorius nėra nulinis. Optimalusis parametrų rinkinys parenkamas minimizuojant raišką

$$\min_{\Theta} m^T(\Theta, \hat{B}) I^{-1} m(\Theta, \hat{B})$$

$$\text{su svorių matrica } I_{3\times 3} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \frac{\partial l_t(R_t, B)}{\partial B}\frac{\partial l_t(R_t, B)}{\partial B^T}\bigg|_{B=\hat{B}}.$$

Matrica $I$ gaunama tiesiogiai įvertinant gradientą iš stebėtų rinkos duomenų matricos.

Turint įverčius $(\hat{\kappa}, \hat{\theta}, \hat{\eta})$, mažiausių kvadratų metodu apskaičiuojamas koreliacijos koeficientas $\rho$. Toliau minimizuojamos paklaidos tarp rinkos ir modelio kainų tokiu būdu:

$$\min_{(\rho)} \sum_{i=1}^{n} \left(C_{\text{rinkos}_i} - C_{\text{modelio}}(\rho, K_i)\right)^2;$$

čia $n$ – vienos dienos pasirinkimo sandorių skaičius. Ši procedūra atliekama kiekvienos dienos duomenims.

Logaritminio Ornstein–Uhlenbeck modelio parametrai įvertinami analogiškai.

## 5. Empirinis modelių tyrimas

Tirsime valiutų kurso EUR/USD europietiško tipo pirkimo pasirinkimo sandorius, prekiaujamus Lietuvoje. Pasirinkimo sandorių duomenis (gautus iš Vilniaus banko) daliname į grupes pagal pelningumą ($S/K - 1$) ir jų gyvavimo trukmę. Tarsime, kad pirkimo pasirinkimo sandorius yra ATM (angl. at-the-money), jei sandorio metu pirkėjo pasirinkta kaina yra lygi išankstinio valiutų keitimo sandorio kainai, arba jei pelningumas priklauso intervalui ($-0,5$ proc., 0,5 proc.). Pasirinkimo sandorius yra ITM (angl. in-the-money), jei sandorio metu nustatyta kaina sandorio pirkėjui yra palankesnė už išankstinio valiutų keitimo sandorio kainą, arba jei pelningumas $\in (0,5\text{proc.}, 1\text{proc.})$ ir OTM (angl. out-of-the-money), jei sandorio metu nustatyta kaina sandorio pardavėjui yra palankesnė už išankstinio valiutų keitimo sandorio kainą, arba jei pelningumas $\in (-1\text{proc.}, -0,5\text{proc.})$, DOTM (angl. deep-out-of-the-money), jei pelningumas mažesnis už $-1$ proc. Laikysime, kad pasirinkimo sandorius yra trumpo laikotarpio (termino), jeigu laikas nuo sandorio pasirašymo iki pasirinkimo teisės įgyvendinimo yra 1 mėnuo, vidutinio laikotarpio, jei laikas iki jo gyvavimo pabaigos yra 3 mėnesiai ir ilgo laikotarpio, jei terminas 6 mėnesiai. Tyrimui naudojami 82 dienų nuo 2004–01–05 iki 2004–04–30 duomenys (969 Vilniaus banke prekiaujamų pasirinkimo sandorių stebėjimai).

Numanomojo sklaidos parametro (*implied volatility*) reikšmės, priklausančios nuo pelningumo ir apskaičiuotos pagal anksčiau minėtus modelius bei atvaizduotos grafiškai, turi šypsenos (angl. volatility smile) pavidalą. Skaičiuojant Hull–White'o modelio numanomojo sklaidos parametro reikšmes naudojamasi (5) lygtimis. Taigi $F(I) \equiv C_{BS}(I) - \hat{p}C_{BS}(\hat{\sigma}_1) - (1-\hat{p})C_{BS}(\hat{\sigma}_2) = 0$; čia $C_{BS}$ – Black–Scholes formulės raiška, $I$ – numanomasis sklaidos parametras, apskaičiuojamas Niutono–Rapsono metodu.

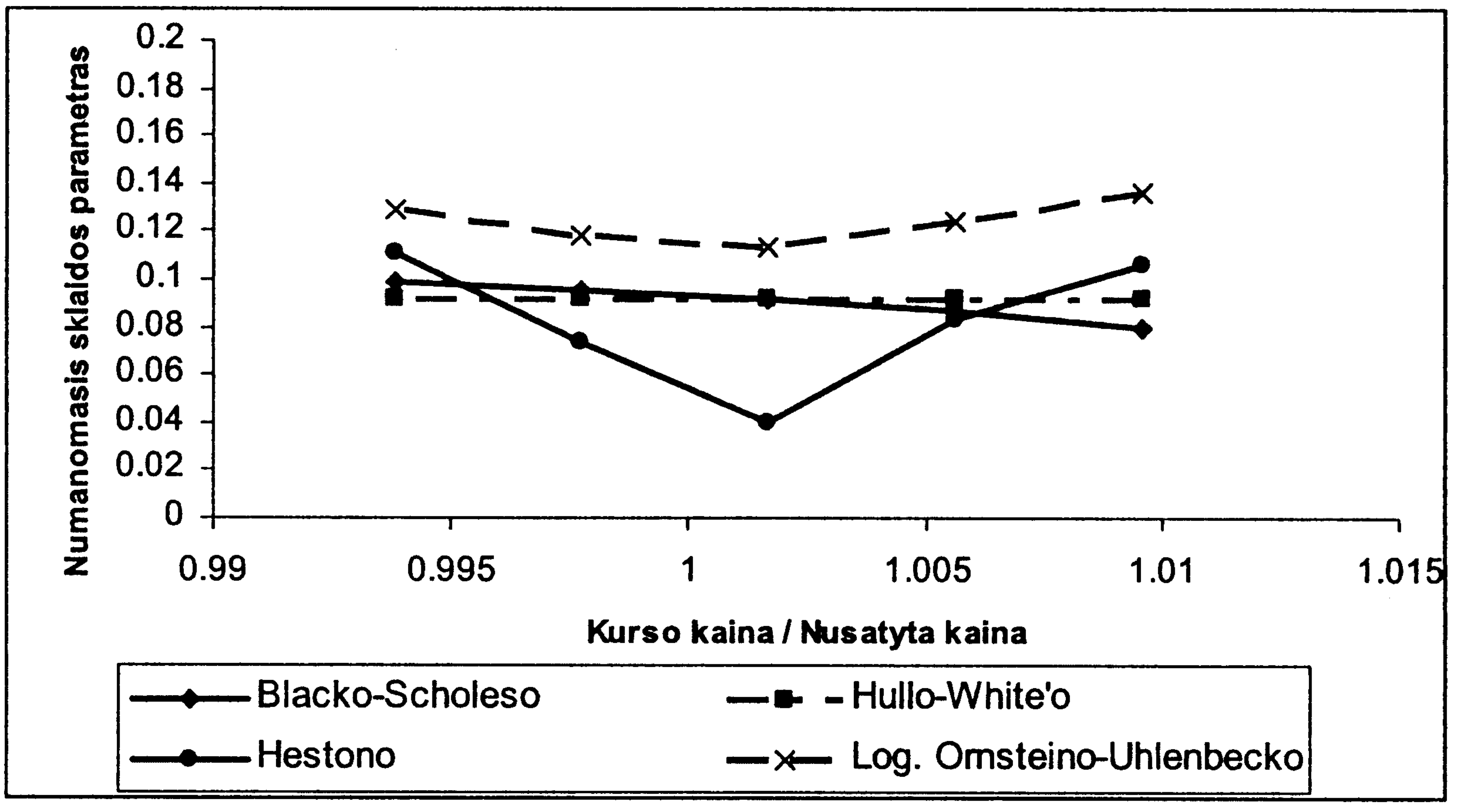
Modeliavimas Monte-Carlo metodu atliekamas pagal algoritmą:

1. Gaunamos dienos sklaidos parametro ir aktyvo kainos kitimo trajektorijos pagal Hestono ir logaritminį Ornsteino–Uhlenbecko modelius.
2. Suskaičiuojama pasirinkimo sandorio vertė kiekvienos dienos pabaigoje: $h(S_t) = \max\{0, S_t - K\}$, $t = \overline{1,T}$.
3. Pasirinkimo sandorio kaina nuliniu momentu randama iš lygties: $C_{\text{modelio}} = e^{-r_{Base}T}\mathrm{E}(h(S_T))$.
4. Numanomojo sklaidos parametro reikšmės randamos iš lygties: $C_{BS}(I) - C_{\text{modelio}} = 0$.

Jei gautoji numanomojo sklaidos parametro reikšmė artima Blacko–Scholeso numanomai reikšmei, tai teorinė pasirinkimo sandorio kaina yra artima jo rinkos kainai.

Stochastinio sklaidos parametro modeliai pervertina DOTM ir ITM pasirinkimo sandorius ir nepakankamai įkainoja OTM pasirinkimo sandorius, išskyrus logaritminį Ornstein–Uhlenbeck modelį, kuris pervertina visus pasirinkimo sandorius (žr. 1 lentelė). Ši tendencija ypač ryški trumpojo periodo pasirinkimo sandoriams. Vidutinio ir ilgojo periodo pasirinkimo sandorius stochastinio sklaidos parametro modeliai įkainoja geriau, nei trumpojo termino pasirinkimo sandorius.

Pasirinkimo sandorio įkainojimo paklaidos lyginamos su stebėtomis rinkoje kainomis, pagrįstomis santykinės įkainojimo paklaidos vidurkiu $\Delta_s$ ir vidutinės kvadratinės




1 pav. Numanomojo sklaidos parametro šypsenos 1 mėn. periodui.

1 lentelė. Numanomojo sklaidos parametro reikšmių palyginimas

| Pelningumas ($x = S/K - 1$) | Modelis | Laikas iki opciono įgyvendinimo | | | Viso |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Trumpas | Vidutinis | Ilgas | |
| DOTM ($x < -0,01$) | Blacko–Scholeso | 0,1425 | 0,1209 | 0,1125 | 0,1253 |
| | Hullo–White'o | 0,1432 | 0,1218 | 0,1126 | 0,1259 |
| | Hestono | 0,1661 | 0,1269 | 0,1039 | 0,1323 |
| | Log. Ornsteino–Uhlenbecko | 0,1616 | 0,126 | 0,1197 | 0,1358 |
| OTM ($-0,01 < x < -0,005$) | Blacko–Scholeso | 0,1266 | 0,1107 | 0,1052 | 0,1141 |
| | Hullo–White'o | 0,1238 | 0,1106 | 0,1049 | 0,1131 |
| | Hestono | 0,1194 | 0,0966 | 0,0872 | 0,1011 |
| | Log. Ornsteino–Uhlenbecko | 0,137 | 0,1219 | 0,1186 | 0,1258 |
| ATM ($-0,005 < x < -0,005$) | Blacko–Scholeso | 0,1103 | 0,1012 | 0,0985 | 0,1033 |
| | Hullo–White'o | 0,1084 | 0,1012 | 0,0982 | 0,1026 |
| | Hestono | 0,0636 | 0,0636 | 0,0661 | 0,063 |
| | Log. Ornsteino–Uhlenbecko | 0,1214 | 0,1174 | 0,1167 | 0,1185 |
| ITM ($0,005 < x < 0,01$) | Blacko–Scholeso | 0,0868 | 0,0901 | 0,0912 | 0,0894 |
| | Hullo–White'o | 0,0945 | 0,0941 | 0,0934 | 0,094 |
| | Hestono | 0,0975 | 0,0907 | 0,0603 | 0,0898 |
| | Log. Ornsteino–Uhlenbecko | 0,1374 | 0,1208 | 0,1175 | 0,1252 |

paklaidos vidurkiu $\Delta_v$:

$$\Delta_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|C_i^M - C_i|}{C_i}, \qquad \Delta_v = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(C_i^M - C_i)^2};$$

2 lentelė. Santykinės pasirinkimo sandorių įkainojimo paklaidos

| Pelningumas ($x = S/K - 1$) | Modelis | Laikas iki opciono įgyvendinimo | | | Viso |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Trumpas | Vidutinis | Ilgas | |
| DOTM ($x < -0,01$) | Blacko–Scholeso | 0,0381 | 0,0194 | 0,0156 | 0,0244 |
| | Hullo–White'o | 0,0352 | 0,0236 | 0,0152 | 0,0246 |
| | Hestono | 0,6935 | 0,2018 | 0,2064 | 0,3672 |
| | Log. Ornsteino–Uhlenbecko | 0,1828 | 0,2311 | 0,1682 | 0,194 |
| OTM ($-0,01 < x < -0,005$) | Blacko–Scholeso | 0,0473 | 0,0259 | 0,0175 | 0,0302 |
| | Hullo–White'o | 0,0443 | 0,0245 | 0,015 | 0,0279 |
| | Hestono | 0,3365 | 0,2309 | 0,2507 | 0,2726 |
| | Log. Ornsteino–Uhlenbecko | 0,1971 | 0,1769 | 0,1192 | 0,1644 |
| ATM ($-0,005 < x < -0,005$) | Blacko–Scholeso | 0,0397 | 0,0199 | 0,0171 | 0,0256 |
| | Hullo–White'o | 0,038 | 0,0231 | 0,0156 | 0,0255 |
| | Hestono | 0,3426 | 0,343 | 0,2795 | 0,3284 |
| | Log. Ornsteino–Uhlenbecko | 0,1884 | 0,1248 | 0,091 | 0,1347 |
| ITM ($0,005 < x < 0,01$) | Blacko–Scholeso | 0,0614 | 0,0348 | 0,0238 | 0,04 |
| | Hullo–White'o | 0,0637 | 0,0394 | 0,0251 | 0,04 |
| | Hestono | 0,3405 | 0,2494 | 0,2332 | 0,3077 |
| | Log. Ornsteino–Uhlenbecko | 0,1859 | 0,0934 | 0,0918 | 0,1236 |

čia $n$ – pasirinkimo sandorių skaičius, $C_i$ ir $C_i^M$ – rinkos ir teorinė modelio kainos. $\Delta_s$ įvertina santykinės pasirinkimo sandorių įkainojimo paklaidos vidurkį tarp modelio ir rinkos kainos, o $\Delta_v$ įvertina vidutinę kvadratinę įkainojimo paklaidą. $\Delta_s$ ir $\Delta_v$ skaičiuojamos esant skirtingam pelningumui ir laikui iki pasirinkimo sandorio gyvavimo pabaigos.

Visi modeliai perkainoja DOTM bei ITM pasirinkimo sandorius, o Hull–White modelis nepakankamai įkainoja visų trukmių ITM pasirinkimo sandorius (žr. 2 lentelė). ITM, DOTM ir trumpojo termino pasirinkimo sandorių įkainojimo paklaidos yra didžiausios. Taigi, šie rezultatai patvirtina prieš tai darytas išvadas, remiantis sklaidos parametro šypsena. Hull–White modelis aiškiai pranašesnis prieš Black–Scholes ir kitus stochastinio sklaidos parametro modelius. Hull–White modelio vidutinė santykinė pasirinkimo sandorių įkainojimo paklaida mažesnė už Black–Scholes modelio 7 iš 12 atvejų. Didėjant terminui, pasirinkimo sandorių įkainojimo paklaidos mažėja. Santykinės ir vidutinės kvadratinės įkainojimo paklaidos sutampa.

## 6. Išvados

1. Stochastinių modelių numanomasis sklaidos parametras geriau atspindi vidutinio ir ilgojo, negu trumpojo pasirinkimo sandorių termino rinkos numanomąjį sklaidos parametrą.
2. Pelningumo atžvilgiu numanomasis sklaidos parametras, gautas panaudojus stochastinius modelius, yra didesnis (mažesnis) nei iš rinkos kainos numanomas sklaidos parametras DOTM ir ITM (OTM) pasirinkimo sandoriams.

3. Nagrinėti modeliai pervertina DOTM bei ITM (išskyrus Heston modelį) ir nepakankamai įkainoja ATM pasirinkimo sandorius. Mažiausios pasirinkimo sandorių įkainojimo paklaidos gaunamos su Hull–White modeliu, o didžiausios su Heston modeliu.
4. Logaritminį Ornstein–Uhlenbeck modelį patartina taikyti įkainojant tik ilgo laikotarpio (6 mėn.), o Hull–White – bet kurio laikotarpio nagrinėtus pasirinkimo sandorius.

## Literatūra


1. B. Cuthberston, *Quantative Financial Economics*, John Wieley&Sons, New York (1996).
2. P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press (1997).
3. N. Neftci, *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press (1998).
4. F. Black, M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilieties, *Journal of Political Economy*, **81**, 637–654 (1973).
5. J. Hull, A. White, The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *Journal of Finance*, **42**, 281–300 (1987).
6. S.L. Heston, A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, **6**, 327–343 (1993).
7. S. Alizadeh, M.W. Brant, F.X. Diebold, *Randge-Based Estimation of Stochastic Volatility Models of Exchange Rate Dynamics are More Interesting Than You Think* (2002).
8. J. Shu, *Pricing S&P 500 Index Options under Stochastic Volatility with the Indirect Inference Method*, University of International Business and Economics, China (2002).
9. K. Andersson, *Stochastic Volatility: U.U.D.M*, Project report (2003).



SUMMARY

***A. Valaitytė, E. Valakevičius. Influence of stochastic volatility for option pricing***

The article analyzes three models of stochastic volatility. Investigation of influence of stochastic volatility for pricing options traded in the Vilnius bank is done.


*Keywords:* asset price dynamics, stochastic volatility model, pricing options.