Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 169–173

О разрушении периодических решений одной системы нелинейных уравнений Шредингера

Гинтарас ПУРЮШКИС (VU)
e-mail:gintaras.puriuskis@maf.vu.lt

Резюме. Рассматривается система двух нелинейных уравнений Шредингера с нелинейными членами четвертой степени

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = iD^2u_1 + i2|u_1|^2|u_2|^2u_1,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = iD^2u_2 + i|u_1|^4u_2$$

с начальным условием $u_j(0,x) = u_{0j}(x)$, $t > 0$, $x \in (-2,2)$, $D = \frac{\partial}{\partial x}$. Функции u_j и их производные совпадают в граничных точках $x = -2$ и $x = 2$. Получены условия, при которых решение разрушается.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, нелинейная задача, взрыв (коллапс).

В статье [1] получены условия разрушающегося зушения для одного уравнения Шредингера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = iD^2u_1 + i|u|^4u.$$

Это уравнение имеет физический смысл, поскольку оно описывает взрыв солитонов [1]. В настоящей статье рассмотрим систему нелинейных уравнений Шредингера

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = iD^2u_1 + i2|u_1|^2|u_2|^2u_1,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = iD^2u_2 + i|u_1|^4u_2, \tag{1}$$
$$u_j(0,x) = u_{0j}(x), \quad t > 0,\ x \in (-2,2), \tag{2}$$
$$u_j(t,-2)=u_j(t,2), \quad Du_j(t,-2) = Du_j(t,2), \ \frac{\partial u_j(t,-2)}{\partial t}=\frac{\partial u_j(t,2)}{\partial t},\ t>0. \tag{3}$$

Здесь $D = \frac{\partial}{\partial x}$. Решение рассматривается в классе $H^1(-2,\ 2)$. Получены условия, при которых решение разрушается. В настоящей статье используемый метод не применим для уравнений с нелинейными членами больше четвертой степени, также как в [1] нелинейный член $|u|^4 u$ нельзя заменить на $|u|^p u,\ p > 4$.

Обозначим

$$\Phi(x) = \int_0^x \phi(y)\,\mathrm{d}y,$$

где

$$\phi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1, \\ x - (x-1)^3, & 1 \leqslant x < 1 + 1/\sqrt{3}, \\ \text{гладкая}, & 1 + 1/\sqrt{3} \leqslant x < 2, \\ 0, & 2 \leqslant x, \end{cases}$$

здесь $\phi'(x) \leqslant 0$ для $1 + 1/\sqrt{3} \leqslant x$. Для отрицательных x функцию $\phi(x)$ продолжим $\phi(x) = -\phi(-x)$, $D^j\phi \in L^\infty(R)$, $j = 0, 1, 2, 3$. Функция $\Phi(x)$ удовлетворяет условиям $2\Phi \geqslant \phi^2$ и $2\Phi \geqslant 1$ при $1 < |x| < 2$, см. [1]. Отметим, что функция $\Phi(x)$ является четной.

ЛЕММА 1. *Пусть $D^j\rho \in L^\infty(-2,2)$, $j = 1,2$, $\rho(-2) = \rho(2)$, $u \in H^1_{prd}(-2,2)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\|\rho u\|_{L^\infty(1<|x|<2)} \leqslant \sqrt{2}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(1<|x|<2)}\Big(2\|\rho^2 Du\|_{L^2(1<|x|<2)} + \sqrt{2}\|\rho^2 u\|_{L^2(1<|x|<2)} + \|uD\rho^2\|_{L^2(1<|x|<2)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство смотри [1]. Обозначим через u_j^* комплексно сопряженную функцию к u_j.

ЛЕММА 2. *Для решения задачи (1) – (3) справедливы равенства*

$$\begin{aligned} &-\mathrm{Im}\int \phi \sum u_j Du_j^*\,\mathrm{d}x + \mathrm{Im}\int \phi \sum u_{0j} Du_{0j}^*\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^t \Big(2\sum \int D\phi|Du_j(s)|^2\,\mathrm{d}x - 2\int D\phi|u_1(s)|^4|Du_2(s)|^2\,\mathrm{d}x \\ &- \frac{1}{2}\int \sum D^3\phi|Du_j(s)|^2\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\int \Phi \sum |u_j(t)|^2 \mathrm{d}x = \int \Phi \sum |u_{0j}(t)|^2 \mathrm{d}x - 2\int_0^t \Big(\mathrm{Im}\int \sum \phi u_j(s) Du_j^*(s)\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}s \tag{5}$$

для $0 \leqslant t < T$.

Доказательство. Умножим комплексно сопряженное j-е уравнение системы (1) на $D\phi u_j$, просумируем по j и возмем вещественную часть

$$-\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Im}\int \sum \phi u_j(t) Du_j^*(t)\,\mathrm{d}x - \mathrm{Im}\int \sum D\phi u_j(t)\frac{\partial u_j^*(t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x$$

$$\sum\int D\phi|Du_j(t)|^2\,\mathrm{d}x+\int D\phi|u_1(t)|^4|u_2(t)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Умножим j-е уравнение системы (1) на ϕDu_j^* просумируем по j и возмем вещественную часть

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\int\sum D\phi u_j(t)\frac{\partial u_j^*(t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x&=\sum\int D\phi|Du_j(t)|^2\,\mathrm{d}x\\&-\int D\phi|u_1(t)|^4|u_2(t)|^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\sum\int D^3\phi|u_j(t)|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует (4). Для доказательства (5) надо умножить комплексно сопряженное j-е уравнение системы (1) на Φu_j, просумировать по j и взять мнимую часть. Лемма доказана.

Обозначим

$$E(t)=\sum\|Du_j(t)\|_2^2-\int|u_1(t)|^4|u_2(t)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Система (1) удовлетворяет в статье [2] сформулированным условиям:

1) $\operatorname{Re}(2i|u_1|^2|u_2|^2u_1u_1^*+i|u_1|^4u_2u_2^*)=0$,

2) $\dfrac{\partial(|u_1|^4|u_2|^2)}{\partial u_1^*}=2|u_1|^2|u_2|^2u_1,\qquad \dfrac{\partial(|u_1|^4|u_2|^2)}{\partial u_2^*}=|u_1|^4u_2,$

3) Функция $f(u_1,u_2,u_1^*,u_2^*)=|u_1|^4|u_2|^2$ является однородной, поэтому $E(t)=E(0)=E_0$.

ЛЕММА 3. *Если*

$$\|u_j(t)\|_{L^2(1<|x|<2)}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad j=1,\ 2,\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{8}$$

то

$$\begin{aligned}&-\operatorname{Im}\int\phi\sum u_jDu_j^*\,\mathrm{d}x+\operatorname{Im}\int\phi\sum u_{0j}Du_{0j}^*\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\Big(2E_0+80(1+M)^2\|u_{01}\|_2^4\|u_{02}\|_2^2+\frac{M}{2}\sum\|u_{0j}\|_2^2\Big)t,\end{aligned} \tag{9}$$

где $M=\sum_{j=1}^3\|D^j\phi\|_{L^\infty}$.

Доказательство. Из определения E_0 получаем

$$\sum\|Du_j(t)\|_{L^2(|x|<1)}=E_0-\sum\|Du_j(t)\|_{L^2(1<|x|<2)}+\int|u_1(t)|^4|u_2(t)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Далее имеем по лемме 2

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{Im} \int \phi \sum u_j D u_j^* \,\mathrm{d}x + \operatorname{Im} \int \phi \sum u_{0j} D u_{0j}^* \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t \Bigl(2 \sum \int D\phi |Du_j(s)|^2 \,\mathrm{d}x - 2 \int D\phi |u_1(s)|^4 |u_2(s)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \sum D^3\phi |u_j(s)|^2 \,\mathrm{d}x\Bigr) \,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \Bigl(2E_0 - 2 \int_{1<|x|<2} \sum (1 - D\phi) |Du_j|^2 \,\mathrm{d}x + 2 \int_{1<|x|<2} (1 - D\phi) |u_1|^4 |u_2|^2 \mathrm{d}x \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \sum D^3\phi |u_j(s)|^2 \,\mathrm{d}x\Bigr) \,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Обозначим $\rho^4 = 1 - D\phi$, далее оценим

$$
\int_{1<|x|<2} (1 - D\phi) |u_1|^4 |u_2|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \|\rho u_1(t)\|^4_{L^\infty(1<|x|<2)} \|u_2(t)\|^2_{L^2(1<|x|<2)}.
$$

Используя лемму 1, аналогично как в [1] получаем

$$
\begin{aligned}
\int_{1<|x|<2} (1 - D\phi) |u_1|^4 |u_2|^2 \,\mathrm{d}x &\leqslant 32 \|u_1(t)\|^2_{L^2(1<|x|<2)} \|u_2(t)\|^2_{L^2(1<|x|<2)} \\
&\quad \times \|\rho^2 D u_1(t)\|^2_{L^2(1<|x|<2)} + 80(1+M)^2 \|u_1(t)\|^4_{L^2(1<|x|<2)} \|u_2(t)\|^2_{L^2(1<|x|<2)}.
\end{aligned}
$$

Из условия (8) следует (9). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $u_{0j} \in H^1(-2, 2)$,

$$
\|u_j(t)\|_{L^2(1<|x|<2)} \leqslant \frac{1}{4}, \quad j = 1,\ 2,
$$

$$
\nu = -2E_0 - 80(1+M)^2 \|u_{01}\|_2^4 \|u_{02}\|_2^2 - \frac{M}{2} \sum \|u_{0j}\|_2^2 > 0,
$$

$$
\Bigl(\sum \Bigl(\frac{4}{\nu} \|Du_{0j}\|_2^2 + 1\Bigr) \int \Phi |u_{0j}(t)|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4\sqrt{2}}. \tag{10}
$$

Тогда решение задачи (1)–(3) *имеет взрыв в некоторый момент времени* $T < \infty$, *т.е.*

$$
\sum \|Du_j\|_2 \to \infty \quad \textit{при } t \to T.
$$

Доказательство. Из (5) и (9) следует

$$
\int \Phi \sum |u_j(t)|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \int \Phi \sum |u_{0j}|^2 \,\mathrm{d}x - 2t \operatorname{Im} \int \phi \sum u_{0j} D u_{0j}^* \,\mathrm{d}x - \nu t^2. \tag{11}
$$

Далее имеем

$$\int \Phi \sum |u_j(t)|^2 \mathrm{d}x \leqslant -\nu\Big(t + \frac{1}{\nu}\mathrm{Im}\int \phi \sum u_{0j} Du_{0j}^* \,\mathrm{d}x\Big)^2 + \frac{1}{\nu}\Big(\mathrm{Im}\int \phi \sum u_{0j} Du_{0j}^* \,\mathrm{d}x\Big)^2$$
$$+ \int \Phi \sum |u_{0j}|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{\nu} \sum \|\phi u_{0j}\|_2^2 \|Du_{0j}\|_2^2 + \int \Phi \sum |u_{0j}|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Из неравенства $\phi^2 \leqslant 2\Phi$ и (10) получаем

$$\int \Phi \sum |u_j(t)|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \sum \Big(\frac{4}{\nu}\|Du_{0j}\|_2^2 + 1\Big) \int \Phi |u_{0j}|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Из неравенства $1 \leqslant 2\Phi$ для $1 < |x| < 2$ и (11) получаем

$$\|u_j(t)\|_{L^2(1<|x|<2)} \leqslant \Big(2\int \Phi |u_{0j}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \leqslant \Big(2\int \Phi \sum |u_{0j}|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \leqslant \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Доказали неравенство (8), поэтому справедливо неравенство (9) и следовательно (11). В квадратичном трехчлене правой части неравенства (11) коэффициент при t^2 отрицательный, поэтому $\int \Phi \sum |u_j(t)|^2 \,\mathrm{d}x$ обращается в нуль в конечное время $t = T$. Поскольку $\Phi > 0$ кроме $x = 0$, то решение имеет взрыв. Теорема доказана.

Литература

1. Takayoshi Ogava, Yoshio Tsutsumi, Blow up of solutions for the nonlinear Schrodinger equation with quartic potential and periodic boundary condition, *Lecture Notes in Math.*, **1450**, 236–251 (1990).
2. А. Домаркас, О разрушении решений системы нелинейных уравнений Шредингера, *Liet. matem. rink.*, **35**(2), 181–189 (1995).

REZIUMĖ

G. Puriuškis. Apie Šredingerio lygčių sistemos periodinio sprendinio sprogimą

Nagrinėjama dviejų Šredingerio lygčių su ketvirtos eilės netiesiniais nariais sistema

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = iD^2 u_1 + i2|u_1|^2|u_2|^2 u_1,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = iD^2 u_2 + i|u_1|^4 u_2,$$

$u_j(0,x) = u_{0j}(x)$, $t > 0$, $x \in (-2,2)$, $D = \frac{\partial}{\partial x}$. Funkcijos u_j ir jų išvestinės sutampa intervalo galuose $x = -2$ ir $x = 2$. Rastos sprendinio sprogimo sąlygos.