Liet. matem. rink., **44**, *spec. nr.*, 2004, 144–149

Представление решений сильно вырождающегося матричного дифференциального уравнения в частных производных интегралом Лапласа

Донатас ЮРГАЙТИС (ŠU) *
e-mail: pletra@cr.su.lt

Вырождение порядка уравнения в частных производных с аналитическими коэффициентами, как правило, приводит к появлению особенностей у всех или у части решений уравнения в окрестности точек многообразия вырождения. Знание структуры решений таких уравнений очень важно при формулировке и решении краевых задач [1]. В теории ирегулярных особенностей обыкновенных дифференциальных уравнений плодотворным является применение метода Пуанкаре [2]. Этот метод целесообразно использовать и при построении решений дифференциальных уравнений в частных производных [3].

В данной работе исследуем следующее матричное дифференциальное уравнение в частных производных:

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}+I_1\frac{\partial u}{\partial y}+I_2\frac{\partial u}{\partial z}\right)=A(x,y,z)u, \tag{1}$$

где p – натуральное число, $u(x,y,z)=(u_1(x,y,z),u_2(x,y,z),u_3(x,y,z),u_4(x,y,z))$ – искомый вектор столбец, x,y,z – независимые, в общем случае, комплексные переменные, E – единичная матрица, I_1,I_2 – невырожденные постоянные матрицы. $A(x,y,z)$ – голоморфная в полицилиндре $P=\{(x,y,z): |x|<r, |y|<r_1, |z|<r_2\}$ функция, для которой справедливо разложение в сходящийся в окрестности точек вырождения $x=0$ степенной ряд

$$A(x,y,z)=\sum_{k=0}^{\infty}x^kA_k(y,z). \tag{2}$$

В работе [4] доказано, что (1) не имеет решений в виде степенных рядов. Формальной подстановкой

$$u(x,y,z)=\exp\{-B(x,y,z)\}\,v(x,y,z)x^{\rho(y,z)},$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Литовского государственного фонда по науке и образованию.

$$B(x,y,z)=B_0(y,z)\frac{x^{-p}}{p}+B_1(y,z)\frac{x^{-p+1}}{p-1}+\ldots+B_{p-1}(y,z)x^{-1}, \tag{3}$$

где $\nu(x,y,z)$ – новая искомая функция, а B_i, $i=0,1,\ldots,p-1$ – функции, которые будут определены ниже, матричное уравнение (1) приводится к матричному уравнению

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial\nu}{\partial x}+I_1\frac{\partial\nu}{\partial y}+I_2\frac{\partial\nu}{\partial z}\right)+\sum_{k=0}^{p-1}B_kx^k\nu+x^{p+1}\ln x\left(I_1\frac{\partial\rho}{\partial y}+I_2\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\nu$$

$$+\rho(y,z)x^p\nu-\sum_{k=0}^{\infty}x^kA_k(y,z)\nu-\sum_{k=0}^{p-1}\left(I_1\frac{\partial B_k}{\partial y}+I_2\frac{\partial B_k}{\partial z}\right)\frac{x^{k+1}}{p-k}\nu=0, \tag{4}$$

допускающему формальные решения в виде степенных рядов.

Чтобы найти решения уравнения (1) заменим в (4) искомую функцию $\nu(x,y,z)$ новыми искомыми функциями $\nu^{(k)}(t,y,z,s)$, $k=0,1,...,p-1$, $s=\ln x$, при помощи следующей подстановки, содержащей обобщенный интеграл Лапласа:

$$\nu(x,y,z)=\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{p-1}x^{-k-1}\nu^{(k)}(t,y,z,s)\exp\{-tx^{-p}\}\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Дифференцируем (5) по x, умножаем полученное соотношение на x^{p+1} и имеем

$$x^{p+1}\frac{\partial\nu}{\partial x}=\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{p-1}(-k-1)x^{-k-1}\int_0^t\nu^{(k)}(\tau,y,z,s)\,\mathrm{d}\tau\exp\{-tx^{-p}\}\,\mathrm{d}t$$

$$+\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{p-1}x^{-k-1}pt\nu^{(k)}(\tau,y,z,s)\exp\{-tx^{-p}\}\,\mathrm{d}t$$

$$+\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{p-1}x^{-k-1}\int_0^t\frac{\partial\nu^{(k)}(\tau,y,z,s)}{\partial s}\,\mathrm{d}\tau\exp\{-tx^{-p}\}\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

Дифференцируя (5) по переменным y,z и умножая полученные соотношения на x^{p+1}, получаем:

$$x^{p+1}\frac{\partial\nu}{\partial y}=\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{p-2}x^{-k-1}\int_0^t\frac{\partial\nu^{(k)}(\tau,y,z,s)}{\partial y}\,\mathrm{d}\tau\exp\{-tx^{-p}\}\,\mathrm{d}t$$

$$+\int_0^{\infty}\sum_{k=p-1}^{p-1}x^{-k-1}\int_0^t\frac{\partial\nu^{(k+1-p)}(\tau,y,z,s)}{\partial y}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\exp\{-tx^{-p}\}\,\mathrm{d}t;$$

$$x^{p+1}\frac{\partial\nu}{\partial z}=\int_0^\infty\sum_{k=0}^{p-2}x^{-k-1}\int_0^t\frac{\partial\nu^{(k)}(\tau,y,z,s)}{\partial z}\,\mathrm{d}\tau\exp\{-tx^{-p}\}\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^\infty\sum_{k=p-1}^{p-1}x^{-k-1}\int_0^t\frac{\partial\nu^{(k+1-p)}(\tau,y,z,s)}{\partial z}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\exp\{-tx^{-p}\}\,\mathrm{d}t. \quad (7)$$

Интегрируя (5) по частям, получаем следующие соотношения:

$$x^\alpha\nu=\int_0^\infty\sum_{k=0}^{p-\alpha-1}x^{-k-1}\nu^{(k+\alpha)}(t,y,z,s)\exp\{-tx^{-p}\}\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^\infty\sum_{k=p-\alpha}^{p-1}x^{-k-1}\int_0^t\nu^{(k+\alpha-p)}(\tau,y,z,s)\,\mathrm{d}\tau\exp\{-tx^{-p}\}\,\mathrm{d}t,$$
$$\alpha=0,1,\dots,p-1. \quad (8)$$
$$x^{\beta p}\nu=\int_0^\infty\sum_{k=0}^{p-1}x^{-k-1}\int_0^t\nu^{(k)}(\tau,y,z,s)\frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{(\beta-1)!}\,\mathrm{d}\tau\exp\{-tx^{-p}\}\,\mathrm{d}t,\quad \beta=1,2,\dots.$$

Комбинация соотношений (8) приводит к следующему соотношению:

$$x^{\beta p+\alpha}\nu=\int_0^\infty\sum_{k=0}^{p-\alpha-1}x^{-k-1}\int_0^t\nu^{(k+\alpha)}(\tau,y,z,s)\frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{(\beta-1)!}\,\mathrm{d}\tau\exp\{-tx^{-p}\}\,\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^\infty\sum_{k=p-\alpha}^{p-1}x^{-k-1}\int_0^t\nu^{(k+\alpha-p)}(\tau,y,z,s)\frac{(t-\tau)^{\beta}}{\beta!}\,\mathrm{d}\tau\exp\{-tx^{-p}\}\,\mathrm{d}t. (9)$$

Разложение (2) перепишем следующим образом:

$$A(x,y,z)=\sum_{\alpha=0}^{p-1}A_\alpha(y,z)x^\alpha+\sum_{\beta=1}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{p-1}A_{\beta p+\alpha}(y,z)x^{\beta p+\alpha}. \quad (10)$$

Подставив (6)--(10) в (4), получаем матричное уравнение, которому удовлетворяют подинтегральные функции интеграла (5). Итак, если функция $\nu(x,y,z)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению (4), то подинтегральные функции $\nu^{(k)}(t,y,z,s)$, $k=0,1,\dots,p-1$, удовлетворяют следующей системе матричных интегродифференциальных уравнений:

$$pt\nu^{(p)}+\sum_{l=0}^{p-1-k}b_l\nu^{(l+k)}-\sum_{l=0}^{p-2-k}\left(I_1\frac{\partial b_l}{\partial y}+I_2\frac{\partial b_l}{\partial z}\right)\frac{\nu^{(l+k+1)}}{p-l}$$

$$
-\sum_{l=0}^{p-k-1} A_\alpha \nu^{(\alpha+k)} + \int_0^t \left[(\rho - k - 1)\nu^k + \frac{\partial \nu^{(k)}}{\partial s} \right] d\tau
$$

$$
+ \int_0^t \left[I_1 \frac{\partial \nu^{(k+1)}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \nu^{(k+1)}}{\partial z} + s \left(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) (\nu^{(k+1)} \right.
$$

$$
\left. + (t - \tau)\nu^{(k+1-p)}) + \sum_{l=p-k}^{p-1} b_l \nu^{(l+k-p)} \right] d\tau
$$

$$
+ \int_0^t \left[(t - \tau) \left(I_1 \frac{\partial \nu^{(k+1-p)}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \nu^{(k+1-p)}}{\partial z} \right) \right.
$$

$$
\left. - \sum_{l=p+1-k}^{p-1} \left(I_1 \frac{\partial b_l}{\partial y} + I_2 \frac{\partial b_l}{\partial z} \right) \frac{\nu^{(l+k+1-p)}}{p - l} \right] d\tau
$$

$$
+ \int_0^t \left[\sum_{\alpha=0}^{p-1-k} \sum_{\beta=1}^{\infty} A_{\alpha+\beta p} \frac{(t - \tau)^{\beta-1}}{(\beta - 1)!} \nu^{(\alpha+k)} \right.
$$

$$
\left. + \sum_{\beta=0}^{\infty} \sum_{\alpha=p-k}^{p-1} A_{\alpha+\beta p} \frac{(t-\tau)^\beta}{\beta!} \nu^{(\alpha+k-p)} \right] d\tau = 0, \quad k=0,1,...,p-1. \quad (11)
$$

В системе (11) все $\nu^{(k)}(t, y, z, s) \equiv 0$, когда $k > p - 1$ или $k < 0$. Решений (11) будем искать в виде степенных рядов. Подставив в (11) степенной ряд

$$
\nu^{(k)}(t, y, z, s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} t^\mu \nu_\mu^{(k)}(y, z, s) \quad (12)
$$

и приравнивая нулю коэффициенты при степенях переменного t получим рекуррентные соотношения для определения коэффициентов ряда (12) и полинома $B(x, y, z)$. Приравнение нулю коэффициентов при степенях t^μ, $\mu = 0, 1, ..., p$ приводит к определению $B_k(y, z)$, $k = p - 1, p - 2, ..., 1, 0$, и $\rho(y, z)$ из (3). Они определяются точно также, как в работе [4].

При сравнении коэффициентов при последующих степенях переменного t получаем рекуррентное соотношение для определения коэффициентов ряда (12). Это соотношение имеет следующий вид:

$$
(\rho(\mu + 1) + \rho - (k + 1))\nu_\mu^{(k)} + \frac{\partial \nu_\mu^{(k)}}{\partial s} - \sum_{\mu=1}^{\mu} A_{(m+1)p} \frac{(\mu - m)! \nu_{\mu-m}^{(k)}}{(\mu)!}
$$

$$
- \sum_{m=0}^{\mu} \left(\sum_{l=0}^{k-1} A_{(m+1)p+l-k} \nu_{\mu-m}^{(l)} + \sum_{l=0}^{p-k-2} A_{(m+1)p+l} \nu_{\mu-m}^{(l+k+1)} \right) \frac{(\mu - m)!}{(\mu)!}
$$

$$+ I_1 \frac{\partial v_\mu^{(k+1)}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial v_\mu^{(k+1)}}{\partial z} + \sum_{l=0}^{k-1} B_{l+p-k} v_\mu^{(l)} + \frac{1}{\mu} \left(I_1 \frac{\partial v_{\mu-1}^{(k+1-p)}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial v_{\mu-1}^{(k+1-p)}}{\partial z} \right)$$

$$+ \sum_{l=0}^{k-2} \left(I_1 \frac{\partial B_{l+p-k+1}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial B_{l+p-k+1}}{\partial z} \right) \frac{v_\mu^{(l+2)}}{(k-l-1)}$$

$$+ \frac{1}{\mu} + \left(s v_{\mu-1}^{(k+1-p)} \left(I_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} + I_2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + I_1 \frac{\partial v_{\mu-1}^{(k+1-p)}}{\partial y} + I_2 \frac{\partial v_{\mu-1}^{(k+1-p)}}{\partial z} \right) = 0, \quad (13)$$

где $\mu = 0, 1, 2, \ldots,\ k = p-1,\ p-2, \ldots, 1, 0$.

В рекуррентном соотношении (13) все $v_\mu^{(k)}(y, z, s) \equiv 0$, когда или $\mu < 0$, или $k > p-1$, или $k < 0$. Из (13) все $v_\mu^{(k)}(y, z, s)$, $k = p-1, p-2, \ldots, 1, 0$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$, определяются однозначно через произвольно подобранный $v_0^{(p-1)}(y, z)$, который является собственным вектором матрицы $A_p(y, z)$, соответствующим собственному значению $\rho(y, z)$, если выполнено условие

$$\det\big((p(\mu+1) + \rho(y, z) - k - 1)E - A_p(y, z)\big) \neq 0. \quad (14)$$

Условие (14) означает, что собственные значения матрицы $A_p(y, z)$ различны и их разности не являются целым числом. Если условие (14) не выполняется, то для получения семейств решений, соответствующих кратным и целочисленным собственным значениям матрицы $A_p(y, z)$, приходится вместо собственных векторов рассматривать присоединенные вектора. Более детально на этой проблеме в данной работе не будем останавливаться.

Теперь исследуем сходимость ряда (12). Будем пользоваться методом мажорант. Для коэффициентов разложения (2) справедлива оценка [5]:

$$|A_k(y, z)| \leq A^k |y|^{-1} |z|^{-1}, \quad A - \text{постоянная}, \quad |y| < \frac{r_1}{2},\ |z| < \frac{r_2}{2}. \quad (15)$$

Из (13), возпользовавшись оценкой (15), методом математической индукции, получаем следующие оценки

$$|v_\mu^{(k)}| < C^{\mu-k} (|y||z|)^{k-\mu} |s|^{\mu-k}, \quad \text{для всех} \quad \mu \geq p+1, \quad C - \text{постоянная}. \quad (16)$$

Оценка (16) влечет сходимость ряда (12) при $|t| < \frac{r_1 r_2 \varepsilon}{4C}$, $|y| < \frac{r_1}{2}$, $|z| < \frac{r_2}{2}$, $\left|\frac{1}{s}\right| < \varepsilon$.

Из (11) следует, что справедлива оценка

$$\left| v^{(k)(t,y,z,s)} \right| < C_1 \exp\left\{ C_2 t |y|^{-1} |z|^{-1} |s| \right\}, \quad C_1 \text{ и } C_2 - \text{постоянные}. \quad (17)$$

Оценка (17) гарантирует то, что подинтегральные функции интеграла (5) растут при $t \to \infty$ небыстрее экспоненты и интеграл (5) сходится при $\operatorname{Re}(x^p) < \frac{r_1 r_2 \varepsilon}{4C}$, $|y| < \frac{r_1}{2}$, $|z| < \frac{r_2}{2}$.

Таким образом мы получили решения матричного уравнения (4), представленные обобщенным интегралом Лапласа, а в силу (3) – и матричного уравнения (1).

Подставив в (5) выражения функций $v^{(k)}$ в виде степенного ряда (12), почленным интегрированием получаем следующее выражение решения матричного уравнения (4)

$$v(x, y, z) = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} x^{p(\mu+1)-k-1} v_{\mu}^{(k)}(y, z)\mu!,$$

которое совпадает с формальным решением, полученным в работе [4].

Таким образом в окрестности плоскости вырождения $x = 0$ существует семейство решений матричного уравнения (1), имеющих следующую структуру:

$$u(x, y, z) = x^{\rho(y,z)} \exp\left\{-\left(B_0(y, z)\frac{x^{-p}}{p} + B_1(y, z)\frac{x^{-p+1}}{p-1} + \dots + B_{p-1}(y, z)\frac{1}{x}\right)\right\}$$
$$\times \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{p-1} x^{-k-1} v^{(k)}(t, y, z, s) \exp\{-tx^{-p}\}\, \mathrm{d}t.$$

Литература

1. S. Rutkauskas, The Dirichlet problem with asymptotic conditions for an elliptic system degerating at a point, II, *Differential Equations*, **38**(5), 719–725 (2002).
2. J. Horn, Uber die Reicheentwicklungen der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singularen Stellen, *Journal fur reine und angewandte Mathematiker*, **117**, 104–128, 254–266 (1997).
3. А.И. Янушаускас, Применение метода Пуанкаре в аналитической теории уравнений с частными производными, *Литовский математический сборник*, **21**(2), 209–213 (1981).
4. D. Jurgaitis, On the solutions of an elliptic system of differential equation with irregular degeration of the order, *Fizikos ir matematikos fakulteto mokslinio seminaro darbai*, Šiauliai, **6**, 34–41 (2003).
5. А.И. Янушаускас, *Аналитическая теория эллиптических уравнений*, Новосибирск, Наука СО (1979).

REZIUMĖ

D. Jurgaitis. Stipriai išsigimstančios matricinės dalinių išvestinių diferencialinės lygties sprendinių dėstiniai Laplaso integralais

Išnagrinėta pirmos eilės dalinių išvestinių matricinė diferencialinė lygtis, kurios eilė stipriai išsigimsta trimatės kompleksinės erdvės hiperplokštumos taškuose. Rastos holomorfinių visur išskyrus išsigimimo daugdaros taškus lygties atskirųjų sprendinių šeimos. Atskirų jų sprendinių šeimos išreikštos apibendrintais, daugiamačiais Laplaso integralais.